行列の積の練習問題の解答。

（作成途中）

version: April 26, 2020

使い方の注意：「背景」には、ずっと後で学習する内容を含んでいますので、現時点で全く理解できなくても構いません。気にしないように。興味ある人が検索に便利なようにキーワードを挙げておくだけです。気にしないように（２回目）。

$\boxed{1}$ 答え：$AB = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$ となる。

参考：なお、さらに変形して、$AB = (ad-bc)E = BA$ と書くこともできる。

$\boxed{2}$ 答え：$AB = E, BA = E$. 問題 $\boxed{1}$ を使うとやさしいが、使わずに直接計算してもやさしい。どちらでも良い。

補足：つまり、$B = A^{-1}$ である。２次の正方行列の逆行列の公式として、以下の問題で自由に用いて良い。

$\boxed{3}$ 答え：$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$AC - CA = -2A$, $BC - CB = 2B$.

狙い：行列の積が<u>可換ではない</u>こと（<u>非可換</u>と言います）の練習。

背景：単純リー環 $\mathfrak{sl}(2)$ として学習するものから題材を借りてきています。４年生で学習します。

参考：$[X, Y] = XY - YX$ をリー括弧積と呼ぶことがあります。$[X, Y] = O$ の時は X と Y は可換です。$[X, Y] \neq O$ の時は X と Y は非可換です。

$\boxed{4}$ 答え：$X^2 = E, Y^2 = E, Z^2 = E, H^2 = E.$

$X^{-1} = X, Y^{-1} = Y, Z^{-1} = Z, H^{-1} = H.$

$S^2 = Z$, ... 計算結果の表示、途中、後で加筆します。

背景：これは量子計算機でよく使われる記号と関係式から題材を借りてきています。その分野では、行列 X, Y, Z はそれぞれ X ゲート、Y ゲート、Z ゲートと呼びます。行列 H は Hadamard ゲート（アダマール・ゲート）と呼ばれているものです。行列 C は位相演算子と呼ばれているもので、 Clifford ゲート（クリフォード・ゲート）の一つです。

$\boxed{5}$ 答え：$-(ad - bc)E.$

狙い：行列の冪や行列の多項式の計算練習。

補足：A^2 を直接計算するのが普通の解法です。別解としては、与えられた式が $-A((a+d)E - A)$ と変形できることに気がつき、そして、眼がとても良い人は、$(a+d)E - A$ が問題 $\boxed{1}$ の B であることに気がつけば (!)、問題 $\boxed{1}$ を使うこともできます。

背景：つまり、公式 $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = O$ が成り立ちます。これを Cayley-Hamilton (ケーリー・ハミルトン）の定理と言います。4 章で学習します。ケーリー・ハミルトンの定理は、サイズが n の正方行列に対しても成り立ちますが、その式の形はもっと複雑になります。

$\boxed{6}$ 答え：$(a+d)E.$

参考：$\boxed{5}$ を用いてもいいですし、直接計算してもいいです。

背景：クライン群という分野では、この種の関係式がたくさん使われます。

素材置き場：

- 答え：$AB = E, BA = E.$

  狙い：２次の正方行列よりもサイズの大きな行列の積の練習。

  背景：行列 A は E_8 型のカルタン行列と呼ばれるものです。ルート系に深く関係し、代数群、組み合わせ論、代数幾何など多彩な分野に登場します。

(*) 狙い：転置行列の計算の練習。

- 背景：幾何学的な由来のある行列：原点を中心とする回転。原点を通る直線に関する線対称。ここでは幾何の話は不要。行列の積の計算だけをする。

- 背景：多元環の例。（代数ともいう。英語では algebra。）1.2 節の三つの演算（和とスカラー倍と積）で閉じた代数系。