行列の積の練習問題1

version: May 11, 2020

課題の目標：まずは、２次の正方行列の計算で、行列の積の計算に慣れよう。

$\boxed{1}$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ の時、AB, BA を求めよ。

$\boxed{2}$ $ad - bc \neq 0$ であるとする。$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ の時、AB, BA を求めよ。

定義：逆行列

$AB = BA = E$ が成り立つとき、B は A の逆行列であるという。
この時 $B = A^{-1}$ と書く。

定理：逆行列

$ad - bc \neq 0$ であるとする。$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列は $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ である。

証明：上記の問題 (2) で示したことである。

$\boxed{3}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。$B = {}^tA$, $C = AB - BA$ とする。
B, C を求めよ。また、$AC - CA, BC - CB$ を求めよ。

$\boxed{4}$ $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $H = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とする。 なお、$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位である。

(4-1) X^2, Y^2, Z^2, H^2 を求めよ。

(4-2) $X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1}, H^{-1}$ を求めよ。

(4-2$\frac{1}{2}$) X, Y, Z, H の転置行列を求めよ。

(4-3) XY, YX, YZ, ZY, ZX, XZ を求めよ。HZH を求めよ。

(4-4) さらに $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ とする。S^2, S^{-1} を求めよ。SXS^{-1} を求めよ。

$\boxed{5}$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、$A^2 - (a+d)A$ を求めよ。

$\boxed{6}$ $ad-bc=1$ であるとする。$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、$A+A^{-1}$ を求めよ。

$\boxed{7}$ $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$ とする。AB を求めよ。
また $a^2+b^2\neq 0$ の時に A^{-1} を求めよ。

$\boxed{8}$ $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ とする。$A\,{}^tA, {}^tAA,\ B\,{}^tB, {}^tBB$ を求めよ。

$\boxed{9}$ $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$, とする。$A\,{}^tA, {}^tAA,\ B\,{}^tB, {}^tBB$ を求めよ。

$\boxed{10}$ $A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$ とする。$AB,\ A^{-1}$ を求めよ。

$\boxed{11}$ $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ とする。$A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}{}^tA$ を求めよ。

$B=\begin{pmatrix} a^2-b^2 & 2ab \\ 2ab & b^2-a^2 \end{pmatrix}$ とする。${}^tABA$ を求めよ。

$\boxed{12}$ $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$ とする。${}^tABA$ を求めよ。

$\boxed{13}$ $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$ とする。AB, BA を求めよ。$AB-BA$ を求めよ。

$\boxed{14}$ $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$ とする。AB, BA を求めよ。$AB-BA$ を求めよ。

$\boxed{15}$ $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & 0 \end{pmatrix}$ とする。AB を求めよ。

$\boxed{16}$ $A=\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ とする。AB を求めよ。

$\boxed{17}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ を求めよ。

$\boxed{18}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ba^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d-ba^{-1}c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a^{-1}c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を求めよ。ただし、0 でない実数 a に対して、$a^{-1}=1/a=\dfrac{1}{a}$ などと書く。(補足：5/4 に問題の誤りを修正しました。)

$\boxed{19}$ $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。$b\neq 0$ のとき，BAB^{-1} を求めよ。

$\boxed{20}$ $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。

$F=\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $G=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。

$\boxed{21}$ $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。$AJ\,{}^tA$ を求めよ。

$\boxed{22}$ A, B を 2 次の正方行列とする。

(i) $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$ を示せ。$\det(AB)=\det(A)\det(B)$ を示せ。

(ii) さらに P を 2 次の正則行列としたとき，$\mathrm{tr}(P^{-1}AP)=\mathrm{tr}(A)$ を示せ。$\det(P^{-1}AP)=\det(A)$ を示せ。

$\boxed{23}$ 次のそれぞれの A, P に対して、P^{-1} を求めよ。$C=P^{-1}AP$ を求めよ。C^n を求めよ。PCP^{-1} を求めよ。以上を利用して A^n を求めよ。

(i) $A=\begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(ii) $A=\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(iii) $A=\begin{pmatrix} 13 & -30 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(iv) $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

$\boxed{24}$ $A=\begin{pmatrix} 13 & -30 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}$ とする。$P=\frac{1}{5}(2E+A)$, $Q=\frac{1}{5}(3E-A)$ とする。

(i) $\det(A), \mathrm{tr}(A)$ を求めよ。

(ii) A^2-A-6E を求めよ。

(iii) $P+Q$ を求めよ。$3P-2Q$ を求めよ。

(iv) P^2, PQ, QP, Q^2 を求めよ。

(v) A^n を求めよ。

$\boxed{25}$ A を 2 次正方行列とする。ある自然数 m に対して $A^m=O$ ならば $A^2=O$ であることを示せ。(ヒントがないと難しいかもしれない。)

$\boxed{26}$ 名前のついた行列たち。

(i) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ は対称行列であることを示せ。

(ii) $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ は交代行列であることを示せ。

(iii) E と $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は置換行列であることを示せ。

(iv) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$ は直交行列であることを示せ。

(v) $\begin{pmatrix} xyz & -x^2z \\ y^2z & -xyz \end{pmatrix}$ は冪零行列であることを示せ。

(vi) $\begin{pmatrix} 1+xyz & y^2z \\ -x^2z & 1-xyz \end{pmatrix}$ は冪単行列であることを示せ。

(vii) $ps-qr=1$ とする。$\begin{pmatrix} ps & -pq \\ rs & -qr \end{pmatrix}$ は射影行列であることを示せ。O や E は射影行列であることを示せ。

- 定義を述べておくと、それぞれ、(i) ${}^tA=A$, (ii) ${}^tA=-A$, (iii) 各行各列に 1 がちょうど一つずつあり, その他の成分はすべて 0, (iv) ${}^tAA=E$, (v) ある自然数 m に対して $A^m=O$, (vi) ある自然数 m に対して $(A-E)^m=O$, (vii) $A^2=A$. なお、射影行列を冪等行列と呼ぶこともある。それぞれの英語は、(i) symmetric, (ii) alternating, (iii) permutation, (iv) orthogonal, (v) nilpotent, (vi) unipotent, (vii) idempotent あるいは projector.

$\boxed{27}$ 名前のついた行列を列挙しよう。A を 2 次正方行列とする。

(i) 対称行列を列挙せよ。

(ii) 交代行列を列挙せよ。

(iii) 置換行列を列挙せよ。

(iv) 直交行列を列挙せよ。

(v) 冪零行列を列挙せよ。

(vi) 冪単行列を列挙せよ。

(vii) 射影行列を列挙せよ。

$\boxed{28}$ A を 2 次正方行列で、$A \neq O, \det(A)=0$ とする。このとき、$A=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix}$ と書けることを示せ。(なおこの問題は、$\boxed{27}$(vii) のヒントである。)