行列の積の練習問題

（作成途中）

version: April 27, 2020

$\boxed{1}$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ の時、AB, BA を求めよ。

$\boxed{2}$ $ad - bc \neq 0$ であるとする。$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ の時、AB, BA を求めよ。

定義：逆行列

$AB = BA = E$ が成り立つとき、B は A の逆行列であるという。
この時 $B = A^{-1}$ と書く。

定理：逆行列

$ad - bc \neq 0$ であるとする。$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列は $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ である。

証明：上記の問題 (2) で示したことである。

$\boxed{3}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。$B = {}^tA,\ C = AB - BA$ とする。
B, C を求めよ。また、$AC - CA, BC - CB$ を求めよ。

$\boxed{4}$ $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, H = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とする。 なお、$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位である。

(4-1) X^2, Y^2, Z^2, H^2 を求めよ。

(4-2) $X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1}, H^{-1}$ を求めよ。

(4-2$\frac{1}{2}$) X, Y, Z, H の転置行列を求めよ。

(4-3) XZ, ZX, XY, YX, YZ, ZY を求めよ。HZH を求めよ。

(4-4) さらに $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ とする。S^2, S^{-1} を求めよ。SXS^{-1} を求めよ。

$\boxed{5}$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、$A^2 - (a+d)A$ を求めよ。

$\boxed{6}$ $ad - bc = 1$ であるとする。$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、$A + A^{-1}$ を求めよ。

$\boxed{7}$ $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$ とする。AB を求めよ。
また $a^2 + b^2 \neq 0$ の時に A^{-1} を求めよ。

$\boxed{8}$ $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ とする。$A\,{}^tA, {}^tAA,\ B\,{}^tB, {}^tBB$ を求めよ。

$\boxed{9}$ $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$, とする。$A\,{}^tA, {}^tAA,\ B\,{}^tB, {}^tBB$ を求めよ。

$\boxed{10}$ $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$ とする。AB, A^{-1} を求めよ。

$\boxed{11}$ $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ とする。$A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} {}^tA$ を求めよ。

$B = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 - a^2 \end{pmatrix}$ とする。${}^tABA$ を求めよ。

$\boxed{12}$ $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$ とする。${}^tABA$ を求めよ。

$\boxed{13}$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$ とする。AB, BA を求めよ。$AB - BA$ を求めよ。

$\boxed{14}$ $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$ とする。AB, BA を求めよ。$AB - BA$ を求めよ。

$\boxed{15}$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & 0 \end{pmatrix}$ とする。AB を求めよ。

$\boxed{16}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ とする。AB を求めよ。

$\boxed{17}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ を求めよ。

$\boxed{18}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -ba^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d - ba^{-1}c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a^{-1}c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を求めよ。ただし、0 でない実数 a に対して、$a^{-1} = 1/a = \dfrac{1}{a}$ などと書く。

素材置き場 : この後は問題を追加するので、番号がズレると思います。整理してから番号をつけます。

- $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 12 & 8 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 & 15 & 18 & 12 & 6 & 9 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 24 & 16 & 8 & 12 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 20 & 10 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 14 & 7 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 10 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

  とする。AB, BA を求めよ。