行列の積の練習問題1の解答例

version: May 11, 2020

使い方の注意：「背景」に書いた内容には、ずっと後で学習する内容を含んでいます。したがって、「背景」に書いた内容を現時点で全く理解できなくても構いません。気にしないように。興味を持った人が関連事項を検索するときに便利なように、キーワードを挙げる目的で「背景」を書いています。気にしないように（２回目）。

お願い：解答に誤りを見つけたり、説明がわかりづらい点があれば、落合まで連絡してください。改訂します。

$\boxed{1}$ 答え：$AB = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$ となる。

参考：なお、さらに変形して、$AB = (ad-bc)E = BA$ と書くこともできる。

背景：実は行列 B には名前がついていて、A の余因子行列と言います。(p56, 定理 3.4.1)

$\boxed{2}$ 答え：$AB = E, BA = E$. 問題 $\boxed{1}$ を使うとやさしいが、使わずに直接計算してもやさしい。どちらでも良い。

補足：つまり、$B = A^{-1}$ である。２次の正方行列の逆行列の公式として、以下の問題で自由に用いて良い。

$\boxed{3}$ 答え：$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $AC - CA = -2A$, $BC - CB = 2B$.

狙い：行列の積が<u>可換ではない</u>こと（<u>非可換</u>と言います）の練習。

背景：単純リー環 $\mathfrak{sl}(2)$ から題材を借りてきています。４年生で学習します。

参考：$[X,Y] = XY - YX$ をリー括弧積と呼ぶことがあります。$[X,Y] = O$ の時は X と Y は可換です。$[X,Y] \neq O$ の時は X と Y は非可換です。

$\boxed{4}$ (4-1) 答え：$X^2 = E, Y^2 = E, Z^2 = E, H^2 = E$.

(4-2) 答え：$X^{-1} = X, Y^{-1} = Y, Z^{-1} = Z, H^{-1} = H$.

補足：逆行列の公式 $\boxed{2}$ を利用して、ひとつひとつ計算して良いです。あるいは、「$A^2 = E$ ならば、A は A の逆行列である」、つまり $A^{-1} = A$ を見抜けば、(4-1) からすぐに答えがわかります。その場合は、「$A^2 = E$ ならば $A^{-1} = A$」という文章 (statement) を答案に書きましょう。

(4-2$\frac{1}{2}$) 答え：${}^tX = X, {}^tY = -Y, {}^tZ = Z, {}^tH = H$.

(4-3) 答え：$XY = iZ, YX = -iZ, YZ = iX, ZY = -iX, ZX = iY, XZ = -iY$.(あってる?)

補足[1]：特に、$XY = -YX, YZ = -ZY, ZX = -XZ$.

(4-4) $S^2 = Z$, $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. 補足：あとで学習する複素共役や随伴行列の記号を用いると、上の計算結果を $S^{-1} = \overline{S} = S^*$ と書くことができます。

背景：量子計算機でよく使われる記号と関係式から題材を借りてきています。その分野では、行列 X, Y, Z はそれぞれ X ゲート、Y ゲート、Z ゲートと呼びます。行列 H は Hadamard ゲート（アダマール・ゲート）と呼ばれているものです。行列 C は位相演算子と呼ばれているもので、 Clifford ゲート（クリフォード・ゲート）の一つです。

$\boxed{5}$ 答え：$-(ad - bc)E$.

狙い：行列の冪や行列の多項式の計算練習。

補足:A^2 を直接計算するのが普通の解法です。別解としては、与えられた式が $-A((a+d)E-A)$ と変形できることに気がつき、そして、眼がとても良い人は、$(a+d)E - A$ が問題 $\boxed{1}$ の B であることに気がつけば (!)、問題 $\boxed{1}$ を使うこともできます。

背景:つまり、公式 $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E = O$ が成り立ちます。これを Cayley-Hamilton (ケーリー・ハミルトン）の定理と言います。ケーリー・ハミルトンの定理は、サイズが n の正方行列に対しても成り立ちますが、その式の形はもっと複雑になります。p101 定理 5.3.2 で学習します。

定義：２次の正方行列の行列式とトレース

２次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、行列式 $\det A = ad - bc$,
トレース $\mathrm{tr}(A) = a + d$ と定める。(教科書の p43 例 1, ならびに p111 問題 5.)

サガン鳥栖にいたのはトーレス、ここで定義したのはトレース。英語では trace, 日本語では跡。

$\boxed{6}$ 答え：$(a + d)E$.

参考：$\boxed{5}$ を用いてもいいですし、直接計算してもいいです。

背景：クライン群という分野では、この種の関係式がたくさん使われます。

——— ここから、転置行列に関する練習をしてみましょう ———

$\boxed{7}$ 答え：$AB = \begin{pmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix}$, $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

参考:さらに $e = ac-bd$, $f = ad+bc$, $g = \dfrac{a}{a^2 + b^2}, h = -\dfrac{b}{a^2 + b^2}$ とおくと $AB = \begin{pmatrix} e & -f \\ f & e \end{pmatrix}$,

$A^{-1} = \begin{pmatrix} g & -h \\ h & g \end{pmatrix}$ のように同じ形で書ける。

[1]背景：この関係式を反交換と呼ぶことが一部の分野ではあります。

別解:教科書の p9, 例題1.2.2(1) を踏まえた別解。$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると、$A = aE+bJ, B = cE+dJ$ と書ける。したがって、$AB = (aE+bJ)(cE+dJ) = acE^2+adEJ+bcJE+bdJ^2 = acE+adJ+bcJ-bdE = (ac-bd)E+(ad+bc)J$ と計算することもできる。ここで、教科書の 1.2 節 (p8) の分配法則や、$E^2 = E, EJ = J, JE = J, J^2 = -E$ などを使った。

背景 : p52, 例 4。複素数を 2 次の正方行列で表す標準的な方法です。$(a+bi)(c+di) = e+fi$ となっていることは偶然ではありません。可換代数の典型例です。

$\boxed{8}$ 答え : $A^tA = {}^tAA = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}, \quad B^tB = {}^tBB = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}.$

狙い : 転置行列の計算の練習。

参考 : なおこれは、$A^tA = (a^2+b^2)E$ のように書くこともできます。

$\boxed{9}$ 答え : $A\,{}^tA = {}^tAA = E,\ B\,{}^tB = {}^tBB = E.$

定義 : この条件 $X\,{}^tX = {}^tXX = E$ を満たす行列 X を「直交行列」と言います。教科書 (p119). つまり、問題の A, B はどちらも直交行列です。

背景 : これらは「長さを保つ」という幾何学的な由来のある行列です。A は原点を中心とする角度 θ の回転を表す行列です。B は原点を通る直線 $y = (\tan\theta)x$ に関する線対称を表す行列です。ここではまだ幾何の話はしません。行列の積の計算だけをします。

$\boxed{10}$ 答え : $AB = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$

問題 $\boxed{7}$ の発展形です。直接計算でも求まります。どちらの計算方法でも良いです。

補足 : $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}$ と解釈することができます。

背景 : 回転行列の積が回転行列となることを表しています。三角関数の加法定理を行列で表したものです。３年生の代数で群準同型の時に再登場する例です。

$\boxed{11}$ $A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} {}^tA = B,\ {}^tABA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

$\boxed{12}$ ${}^tABA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

——— ここから三角行列を扱います。———

$\boxed{13}$ 答え : $AB = \begin{pmatrix} ax & ay+bz \\ 0 & cz \end{pmatrix}.$

狙い :「上三角行列の積が上三角行列になる」(p10 問題 8) を具体的に確かめています。AB の対角成分が, A の対角成分と B の対角成分の積になっていることも注目点です。

答え：$BA=\begin{pmatrix}ax & bx+cy\\ 0 & cz\end{pmatrix}$, $AB-BA=\begin{pmatrix}0 & ay+bz-bx-cy\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

補足：$AB-BA$ の $(1,2)$ 成分は $(a-c)y-b(x-z)$ とも書けます。

背景：上三角行列の和やスカラー倍や積が上三角行列になります。このことを、上三角行列の全体が多元環をなす、ということができます。多元環は代数ともいいます。英語では algebra です。上三角行列の全体は非可換な多元環の例です。

$\boxed{14}$ 答え：$AB=\begin{pmatrix}ax & 0\\ bx+cy & cz\end{pmatrix}$. $BA=\begin{pmatrix}ax & 0\\ ay+bz & cz\end{pmatrix}$, $AB-BA=\begin{pmatrix}0 & 0\\ bx+cy-ay-bz & 0\end{pmatrix}$.

背景：下三角行列の性質は、上三角行列の性質と類似です。また、転置行列を考えることで、性質を置き換えることもできます。$AB={}^t({}^tA{}^tB)$. 代数反自己同型です。

$\boxed{15}$ $AB=\begin{pmatrix}ax+bz & ay\\ cx & cy\end{pmatrix}$.

$\boxed{16}$ $AB=\begin{pmatrix}ay & az\\ cy & bx+cz\end{pmatrix}$.

解釈：$\boxed{15}$, $\boxed{16}$ では AB のどの成分も自動的に 0 にはなりません。すなわち、これらの行列は、上三角行列や下三角行列のように積では閉じていません。

$\boxed{17}$ 答え：$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

背景：ワイル群の元を三角行列の積で作っています。意味不明だと思います、ごめんなさい。

$\boxed{18}$ $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$.

背景：三角分解と言います。LU 分解とも言います。

$\boxed{19}$ $BAB^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$.

背景：ジョルダン標準形 (8 章) で、ちょいと便利な関係式です。そのときに使います。

$\boxed{20}$ $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a} & -\frac{b}{ac}\\ 0 & \frac{1}{c}\end{pmatrix}$, $B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a} & 0\\ -\frac{b}{ac} & \frac{1}{c}\end{pmatrix}$, $C^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{c}\\ \frac{1}{b} & -\frac{a}{bc}\end{pmatrix}$, $D^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{c}{ab} & \frac{1}{b}\\ \frac{1}{a} & 0\end{pmatrix}$.

解釈：上三角行列 A の逆行列はまた上三角行列です。下三角行列 G の逆行列はまた下三角行列です。同じ形をしています。一方で、C の逆行列は C とは異なる箇所に 0 があります。F, G の逆行列の結果は下の囲みにまとめます。

逆行列の便利な公式

$$\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -b\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a} & 0\\ 0 & \frac{1}{d}\end{pmatrix}$$

背景：p37, 問題 8 で、ブロック行列の場合にこれらの結果を拡張します。

$\boxed{21}$ $AJ\,{}^tA = (ad-bc)J.$

背景：symplectic 行列に関係します。

$\boxed{22}$ (i) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とする。

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}, \\
BA &= \begin{pmatrix} pa+qc & pb+qd \\ ra+sc & rb+sd \end{pmatrix}, \\
\mathrm{tr}(AB) &= (ap+br)+(cq+ds), \\
\mathrm{tr}(BA) &= (pa+qc)+(rb+sd) = \mathrm{tr}(AB), \\
\det(AB) &= (ap+br)(cq+ds)-(aq+bs)(cp+dr) = bcqr+adps-adqr-bcps, \\
\det(BA) &= (pa+qc)(rb+sd)-(pb+qd)(ra+sc) = bcqr+adps-adqr-bcps = \det(AB).
\end{aligned}$$

(ii) $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(P^{-1}(AP)) \overset{(i)}{=} \mathrm{tr}((AP)P^{-1}) = \mathrm{tr}(A(PP^{-1})) = \mathrm{tr}(AE) = \mathrm{tr}(A).$

$\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)\det(P^{-1}P) = \det(A)\det(E) = \det(A).$

補足：$\det(AB) = bcqr+adps-adqr-bcps = (ad-bc)(ps-qr)$ と因数分解できる。つまり、$\det(AB) = \det(A)\det(B)$ という公式が成り立つ。これに気がつけば、$\det(BA) = \det(B)\det(A) = \det(A)\det(B) = \det(AB)$ と計算することで後半の計算を省略して良い。なお、$\mathrm{tr}(AB) \overset{?}{=} \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$ は成り立たない。$\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$ は成り立つ。

$\boxed{23}$ 方針：C は対角行列になる。（そうなるように P を上手に選んできているので。もし、この問題で C が対角行列でなければ、出題ミスです。）$PCP^{-1} = A$ となる。したがって、

$$\begin{aligned}
A^n &= (PCP^{-1})^n \\
&= (PCP^{-1})(PCP^{-1})\cdots(PCP^{-1}) \\
&= PC(P^{-1}P)C\cdots C(P^{-1}P)CP^{-1} \\
&= PC^nP^{-1}.
\end{aligned}$$

P, C^n, P^{-1} を準備してあるので、これで A^n が求まる。

背景：p106, 例題 5.4.1 と p111, 問題 5.4-1(1)(2)(3) から素材を選びました。なお、ここでは問題文で P を与えましたが、A だけから P を求めることが 5.4 節の課題です。この問題にあるように A と P の両方が分かっていれば A^n を求めることは難しくないのです。

$\boxed{24}$ (i) $\det(A) = -6, \mathrm{tr}(A) = 1.$

(ii) ケーリー・ハミルトン

(iii) $P+Q = E$, $3P-2Q = A$.

(iv) まず (iii) より $PQ=O, QP=O$. 次に
$P^2=\frac{1}{25}(A^2+4A+4E)=\frac{1}{25}(A+6E+4A+4E)=\frac{1}{25}(5A+10E)=\frac{1}{5}(A+2E)=P$.
$Q^2=\frac{1}{25}(A^2-6A+9E)=\frac{1}{25}(A+6E-6A+9E)=\frac{1}{25}(-5A+15E)=\frac{1}{5}(3E-A)=Q$.

(v) $A^n=(3P-2Q)^n=(3P)^n+(-2Q)^n=3^nP^n+(-2)^nQ^n=3^nP+(-2)^nQ$.

発展問題：同じようにして、問題 $\boxed{23}$ の (i)(ii)(iv) の A に対して、A^n を同じ方法で求めるためには、P, Q をそれぞれどのように定義すれば良いか、余裕があれば、考えてみましょう。答えは 5.4 節で学習します。

背景：射影行列。射影行列を冪等行列と呼ぶこともある。

$\boxed{25}$ ヒント。$\det(A)=0$ を示せ。$A^2=(a+d)A$ を示せ。$A^m=(a+d)^{m-1}A$ を示せ。$a+d=0$ を示せ。$A^2=O$ を示せ。

$\boxed{26}$ どれも直接チェック。あとで書くかも、書かないかも。

補足：解答に不必要だが、由来を書いておくと、

(v) $\begin{pmatrix} xyz & -x^2z \\ y^2z & -xyz \end{pmatrix}=z\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & -x \end{pmatrix}=z\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$.

(vii) $\begin{pmatrix} ps & -pq \\ rs & -qr \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & -q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix}$.

$\boxed{27}$ 七つとも、一つ前の問題で挙げられたもので全部であることを示す。示し方はいろいろあります。下記はその一例です。また、使って良い予備知識や公式が増えていけば、議論を短縮することも可能です。与えられた解答を理解するだけでなく、どんどん工夫してみましょう。
$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。

(i) $O=A-{}^tA=\begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix}$ ゆえ、$b=c$.

(ii) $O=A+{}^tA=\begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix}$ ゆえ、$a=d=b+c=0$.

(iii) (1,1) 成分が 1 の場合と 0 の場合に分けて考えてみよう。数独（ナンバープレース）の経験があると考えやすい。(1,1) 成分が 1 の場合は、(1,2) 成分と (2,1) 成分は 0. したがって、(2,2) 成分は 1. したがって、単位行列。(1,1) 成分が 0 の場合は、(1,2) 成分と (2,1) 成分は 1. したがって、(2,2) 成分は 0. したがって、$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(iv) 条件 $A{}^tA=E$ を成分で書き下す。$a^2+b^2=1, ac+bd=0, c^2+d^2=1$. $ac+bd=0$ から「ある t が存在して、$d=ta, c=-tb$」となる。$1=c^2+d^2=t^2(a^2+b^2)=t^2$ なので、$t=\pm1$. したがって、$A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ または $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ となる。あとは、$a^2+b^2=1$ となる実数の組 (a,b) を $=(\cos\theta,\sin\theta)$ と表せることを使えば良い。

別解：もし、$(ad-bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2=1\times 1-0^2=1$ に気づけば、$ad-bc=\pm 1$ も使うことができる。$b(ac+bd)+a(ad-bc)=(a^2+b^2)d=d$, $b(ac+bd)+a(ad-bc)=b\times 0+a\times(\pm 1)=\pm a$ ゆえ、$d=\pm a$. 同様に、$a(ac+bd)-b(ad-bc)=(a^2+b^2)c=c$, $a(ac+bd)-b(ad-bc)=a\times 0-b(\pm 1)=\mp b$. 以下は同様。

(v) 方針：Step 1.$A^2=O$ から、$\mathrm{tr}(A)=a+d=0$, $\det(A)=ad-bc=0$ を導く。Step 2. $c\neq 0$ の時。$b=-a^2/c$ であるから、$x=a, y=c, z=1/c$ とすると良い。Step 3. $c=0$ の時。$a=d=0$ を示す。$y=0, x=1, z=-b$ とすれば良い。

(vi) $A-E$ は冪零行列。

(vii) 方針。Step 1. $\mathrm{tr}(A)\neq 1$ の時。A がスカラー行列であることを示す。$A=xE$ が射影行列となるのは $x=0,1$ の場合であることを示す。このとき $A=O$ または $A=E$ である。Step 2. $\mathrm{tr}(A)=1$ の時。まず、$\det(A)=0$ であることを示す。次に、問題 $\boxed{28}$ を用いることができて、$A=\begin{pmatrix} ps & -pq \\ rs & -qr \end{pmatrix}$ と書けることを示す。最後に再び条件 $\mathrm{tr}(A)=1$ を用いて、$ps-qr=1$ を示す。

$\boxed{28}$ 解答 1：$b\neq 0$ の場合は、$c=ad/b$ なので、$p=1, r=a, s=b, q=d/b$ とすれば良い。$b=0$ の場合は $ad=0$ である。$b=a=0$ の場合は $p=0, q=1, r=c, s=d$ とすれば良い。$b=d=0$ の場合は $s=0, r=1, p=a, q=c$ とすれば良い。証明終わり。

補足：「...」とできることを示せ、という問題の場合、とても大雑把に分けて、(i) 具体的に書けないけれど、存在することが示せる、という方針で解く場合と、(ii) 具体的に書けることを式などで与えてしまう、という方針の場合とがあります。上の解答 1 は、方針 (ii) に沿ったものですが、その他の解答ももちろんありますので、考えてみるといいですね。

背景：セグレ埋め込み。(Segre embedding)