行列の積の練習問題2

version: May 20, 2020

課題の目標：行列の積に関する問題です。証明の問題を順次取り入れてみます。行列を塊として理解することも意図しています。

$\boxed{101}$ 冪零行列のスカラー倍は冪零行列であることを示せ。

$\boxed{102}$ n 次正方行列 $X = (x_{ij})$ に対して、$\mathrm{tr}(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ii}$ と定める。$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ を示せ。

$\boxed{103}$ $AB - BA = E$ となる行列 A, B は存在しないことを示せ。

$\boxed{104}$ n 次正方行列 A, B に対して、$[A, B] = AB - BA$ と定義する。次の等式を示せ。

(1) $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$,

(2) $[A, B] = -[B, A]$.

(3) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = O$.

$\boxed{105}$ (1) ${}^t(XY) = {}^tY\,{}^tX$ を用いて、${}^t(XYZ) = {}^tZ\,{}^tY\,{}^tX$ を示せ。

(2) A 対称行列, P 正方行列ならば、$PA\,{}^tP$ は対称行列。

(3) A 交代行列, P 正方行列ならば、$PA\,{}^tP$ は交代行列。

$\boxed{106}$ 勝手な行列は対称行列と交代行列の和に一意的に表せることを示せ。

$\boxed{107}$ $AC = CB$ ならば、$A^3C = CB^3$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{108}$ A が正則行列、B が冪零行列で、$AC = CB$ ならば、C は零行列であることを示せ。

$\boxed{109}$ A, B が逆行列を持つ時、AB も逆行列を持つことを示せ。

$\boxed{110}$ A が逆行列を持つ時、${}^tA$ も逆行列を持つことを示せ。

$\boxed{111}$ $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$ を n 次正方行列とする。$C=AB$ とする。$C=(c_{ij})$ と書く。

(1) p,q を整数とする。「$j<i+p$ ならば $a_{ij}=0$」かつ「$j<i+q$ ならば $b_{ij}=0$」が成り立てば、「$k<i+p+q$ ならば $c_{ik}=0$」となることを示せ。

(2) A を上三角行列で、対角成分が全て 0 であるとする。このとき、$A^n=O$ となることを示せ。

$\boxed{112}$ A を 2 次の正方行列とする。

(1) A が対角行列であれば，条件「すべての 2 次の対角行列 X に対して $AX=XA$」が成り立つことを示せ。

(2) 条件「すべての 2 次の対角行列 X に対して $AX=XA$」が成り立つとする。このとき，A は対角行列であることを示せ。

(3) A がスカラー行列であれば，条件「すべての 2 次の正方行列 X に対して $AX=XA$」が成り立つことを示せ。

(4) 逆に条件「すべての 2 次の正方行列 X に対して $AX=XA$」が成り立つとする。このとき，A はスカラー行列であることを示せ。

(5) $Z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ とする。$ZAZ=A$ ならば A は対角行列である。

(6) 「すべての 2 次の列ベクトル $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ に対して，$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ が成り立つ」ならば，$A=O$ であることを示せ。

(7) 「すべての 2 次の列ベクトル $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ に対して，$A\mathbf{x}=B\mathbf{x}$ が成り立つ」ならば，$A=B$ であることを示せ。

$\boxed{113}$ (1) A が交代行列であれば、「すべての列ベクトル $\mathbf{x}$ に対して ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}=0$ が成り立つ」ことを示せ。

(2) 「すべての列ベクトル $\mathbf{x}$ に対して ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}=0$ が成り立つ」ならば A は交代行列であることを示せ。

$\boxed{114}$ (1) B が交代行列の時、$A=(E-B)(E+B)^{-1}$ は直交行列であることと、$E+A$ は正則行列であることを示せ。

(2) A は直交行列で $E+A$ が正則であるとする。この時 $B=(E-A)(E+A)^{-1}$ は交代行列であることを示せ。

(3) $Y=(E-X)(E+X)^{-1}$ の時、$E+Y=2(E+X)^{-1}, E-Y=2X(E+X)^{-1}, (E-Y)(E+Y)^{-1}=X$ を示せ。