行列の積の練習問題２の解答例

version: May 23, 2020

使い方の注意：「背景」に書いた内容には、ずっと後で学習する内容を含んでいます。したがって、「背景」に書いた内容を現時点で全く理解できなくても構いません。気にしないように。興味を持った人が関連事項を検索するときに便利なように、キーワードを挙げる目的で「背景」を書いています。気にしないように（２回目)。

お願い：解答に誤りを見つけたり、説明がわかりづらい点があれば、落合まで連絡してください。改訂します。

$\boxed{101}$ 解説：A を冪零行列とする。すなわち $A^m = O$ となる自然数 m が存在するとする。c をスカラーとする。$B := cA$ とする。$B^m = (cA)^m = c^m A^m = c^m O = O$. 従って B も冪零行列である。証明終わり。

よくわかっていれば、次のように簡潔に書いてもいいでしょう。
証明２：$\exists m \in \mathbb{N}$ s.t. $A^m = O$ とする。$c \in \mathbb{R}$ に対して、$(cA)^m = c^m A^m = O$. 証明終わり。

参考：スカラー倍に関する性質を示したので、ついでに、和がどうなっているかについて述べておきます。。２つの冪零行列が可換であれば、和も冪零行列である。(余裕があれば証明してみましょう。) 可換でないときは、和は冪零行列とは限らない。(余裕があれば反例を挙げてみましょう。)

$\boxed{102}$ A を $n \times m$ 行列、B を $m \times n$ 行列とする。$A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ とする。$(AB)_{ik} = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}$ なので、$(AB)_{ii} = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{ji}$ である。従って、$\mathrm{tr}(AB) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{ji}$. 同様に、$(BA)_{ik} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{jk}$ なので、$(BA)_{ii} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{ji}$ である。従って、$\mathrm{tr}(BA) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{ji}$. 最後の式で i と j を入れ替えれば、$\mathrm{tr}(BA) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij} = \mathrm{tr}(AB)$ となる。証明終わり。

意味：$\boxed{22}$(1) では２次の正方行列の時に示しました。これが一般のサイズの行列でも成り立つことを示したことになります。${}^t\!A$ と B のサイズが同じであれば、A, B は長方形でも構いません。特に、正方行列 AB と BA のサイズは等しくなくてもこの等式は成り立ちます。

$\boxed{103}$ 方針：「$C = AB - BA$ ならば $\mathrm{tr}(C) = 0$ である」と「$\mathrm{tr}(E) \neq 0$」の２つの主張を示せば良い。
主張１の証明。問題 $\boxed{102}$ より $\mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = 0$.

主張 2 の証明。$\mathrm{tr}(E) = n \neq 0$。証明終わり。

別解：$AB - BA = E$ となる行列 A, B が存在したと仮定して矛盾を導く。両辺のトレースを取ると $\mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(E)$。ここで、$\mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = 0$. 一方、$\mathrm{tr}(E) = n \neq 0$ となる. 以上で矛盾が導けた。証明終わり。

補足：なお $\mathrm{tr}(X + Y) = \mathrm{tr}(X) + \mathrm{tr}(Y), \quad \mathrm{tr}(cX) = c\,\mathrm{tr}(X)$ を使いました。

$\boxed{104}$ これは証明問題というより、計算問題ですね。

(1) 左辺：$[A, BC] = A(BC) - (BC)A$.
右辺:$[A, B]C + B[A, C] = (AB - BA)C + B(AC - CA) = ABC - BAC + BAC - BCA = ABC - BCA =$ 左辺.

(2) 右辺 $= -[B, A] = -(BA - AB) = AB - BA =$ 左辺.

(3) 第 1 項：$[A, [B, C]] = A(BC - CB) - (BC - CB)A = ABC - BCA + CBA - ACB$.
第 2 項：$[B, [C, A]] = B(CA - AC) - (CA - AC)B = BCA - CAB + ACB - BAC$.
第 3 項：$[C, [A, B]] = C(AB - BA) - (AB - BA)C = CAB - ABC + BAC - CBA$.
これらを足して、$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = O$.

発展：(3) 単なる計算ではあるが、「A を B に、B を C に、 C を A に同時に置き換える」、いわゆる、cyclic permutation(巡回置換) を意識すると、どの項とどの項が相殺するかが整頓されて答案が見やすい。

背景：(1) は導分。(2)(3) はリー環の公理。

$\boxed{105}$ (1) $W = XY$ と書くと、${}^t(XYZ) = {}^t(WZ) = {}^tZ{}^tW = {}^tZ{}^t(XY) = {}^tZ({}^tY{}^tX) = {}^tZ{}^tY{}^tX$.

(2) ${}^t(PA\,{}^tP) = {}^t({}^tP){}^tA{}^tP = PA\,{}^tP$ なので対称行列。

(3) ${}^t(PA\,{}^tP) = {}^t({}^tP){}^tA{}^tP = P(-A)\,{}^tP = -PA\,{}^tP$ なので交代行列。

$\boxed{106}$ 補足：問題を全称記号を使って書けば「$\forall A, \exists B, C$ s.t. $A = B + C, {}^tB = B, {}^tC = -C.$」

方針：B, C を A から具体的に与えてしまえば良い。結論「$A = B + C, {}^tB = B, {}^tC = -C$」が成り立っているとしたら、最初の式 $A = B + C$ の転置行列を考えて、${}^tA = {}^t(B + C) = {}^tB + {}^tC = B - C$ である。従って、$A = B + C$ と ${}^tA = B - C$ の和と差を考えれば、$A + {}^tA = 2B, A - {}^tA = 2C$ となるので、B, C は A で書ける！

証明:Step 1. 存在（そう書けること）。与えられた A に対して、$B = \frac{1}{2}(A + {}^tA), C = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$ と定める。この時、$B + C = A, {}^tB = B, {}^tC = -C$ が確認できる。
Step 2. 一意性。$A = B + C = B' + C'$ という 2 通りの書き方に対して、$B - B' = C' - C$ となる。$B - B'$ は対称行列で、$C' - C$ は交代行列なのでこの行列は対称行列かつ交代行列である。教科書の問題 1.1 の 8 よりそれは零行列である。従って、$B - B' = O, C' - C = O$ となり、$B' = B, C' = C$ である。証明終わり。

補足：線型部分空間への直和分解 (7.2 節)。

$\boxed{107}$ $A^3C = AAAC = AACB = ACBB = CBBB.$

補足：3 乗には特別な意味はない。「任意の自然数 m に対して、$A^mC = CB^m$」が成り立つ。証明は m に関する数学的帰納法。

$\boxed{108}$ B は冪零行列なので、ある自然数 m が存在して $B^m = O$ である。従って、$\boxed{107}$ の補足を用いると $A^mC = CB^m = CO = O$. ゆえに $C = (A^{-1})^m A^m C = (A^{-1})^m O = O.$

$\boxed{109}$ 説明：$C = A^{-1}, D = B^{-1}$ とすると、

$$AC = E, CA = E, BD = E, DB = E$$

が成り立っている。$F = DC$ と定義して、F が AB の逆行列であることを示したい。すなわち、「$(AB)F = E, F(AB) = E$」を示そう。（ここまでが証明の準備、下ごしらえである。鍋料理でいえば、野菜を買ってきて、野菜を切って、鍋に入れる前までの段階である。実は、この下ごしらえが証明では重要で、下ごしらえがしっかりできていれば、鍋に入れて煮るのは、つまり証明の本題はそんなに難しくない。）では、計算をスタートしよう。

$$(AB)F = (AB)(DC) = A(BD)C = AEC = AC = E,$$
$$F(AB) = (DC)(AB) = D(CA)B = DEB = DB = E.$$

なお、ここでは行列の積が結合法則を満たすことと、逆行列の定義を自在に使った。したがって、$B^{-1}A^{-1}$ が AB の逆行列であることが示せた。

答案：

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E,$$
$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E.$$

したがって、$B^{-1}A^{-1}$ は AB の逆行列である。

積の逆行列の公式

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

狙い：計算問題だけでなく証明問題を出題してみた。

補足：教科書の p37, 問題 4(3)。そこでは、定理 2.4.1(p34) を使って証明しているが、その定理は 3 章の内容を使う。上で与えた証明は定理 2.4.1 を用いずに、逆行列の定義だけを用いている。

$\boxed{110}$ 説明：$B = A^{-1}$ とすると、$AB = E, BA = E$ が成り立っている。$C = {}^tA$ とする。$D = {}^tB$ として、D が C の逆行列であることを示したい。すなわち「$CD = E, DC = E$」を示したい。

$$CD = {}^tA\,{}^tB = {}^t(BA) = {}^tE = E,$$
$$DC = {}^tB\,{}^tA = {}^t(AB) = {}^tE = E$$

なおここで、転置行列の性質「${}^tX\ {}^tY = {}^t(YX)$」を用いた。したがって、D は C の逆行列である。すなわち、${}^t(A^{-1})$ は ${}^tA$ の逆行列である。

答案１：

$$
\begin{aligned}
{}^tA\ {}^t(A^{-1}) &= {}^t(A^{-1}A) = {}^tE = E, \\
{}^t(A^{-1})\ {}^tA &= {}^t(AA^{-1}) = {}^tE = E
\end{aligned}
$$

したがって、${}^t(A^{-1})$ は ${}^tA$ の逆行列である。

答案２：$B = A^{-1}$ とする。

$$
\begin{aligned}
{}^tA\ {}^tB &= {}^t(BA) = {}^tE = E, \\
{}^tB\ {}^tA &= {}^t(AB) = {}^tE = E
\end{aligned}
$$

したがって、${}^tB$ は ${}^tA$ の逆行列である。

コメント：教科書の問題 2.4(2)。教科書の解答では答案 1 に沿ったものが与えられているが、答案 2 の方がわかりやすいと思ったら、答案 2 を書いて良い。

$\boxed{111}$ (1) 補足：$p = q = 0$ の場合は、上三角行列の積が上三角行列となる、という教科書の p5 問題 1.1 の 8 や、水曜の演習問題で学習した内容である。これの一般化（精密化）である。

方針：１つ目の仮定は「$j \leq i + p - 1$ ならば $a_{ij} = 0$」と書ける。２つ目の仮定は「$k \leq j + q - 1$ ならば $b_{jk} = 0$」と書ける。そこで、

$$
c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = \sum_{j \leq i+p-1} a_{ij} b_{jk} + \sum_{j \geq i+p} a_{ij} b_{jk}
$$

と、和を 2 つの範囲に分ける。第 1 項：$j \leq i + p - 1$ なので $a_{ij} = 0$ であるから、0 の和であり、0 となる。第 2 項：$j \geq i + p$ なので $k \leq i + p + q - 1 \leq j + q - 1$ となる。従って、$b_{jk} = 0$ であるから、0 の和であり、0 となる。従って、$c_{ik} = 0$ が示せた。

(2) 方針：A^p の成分表示を b_{ijp} と書くことにする。「$j \leq i + p - 1$ ならば $b_{ijp} = 0$」が成り立つことを p に関する数学的帰納法で示す。$p = 1$ の時は、仮定より $j \leq i$ ならば $b_{ij1} = 0$ となるので成立している。p の時に成り立つと仮定して、$p+1$ の時に示す。$A^{p+1} = A^p A$ と積の形に書いて、(1) を $q = 1$ について適用すると、$p + 1$ の時が示せる。

補足：同じ行列の n 乗でなくて、異なる行列の積でも良い。すなわち、$A_1, A_2, \ldots, A_n$ を n 次の上三角行列で、対角成分が全て 0 であるとする。この時、積 $A_1 A_2 \cdots A_n = O$ となる。

$\boxed{112}$ (1)(3)(5)(7) はやさしい。

(1) $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ とすると、$AX = \begin{pmatrix} ax & 0 \\ 0 & dy \end{pmatrix}$, $XA = \begin{pmatrix} ax & 0 \\ 0 & dy \end{pmatrix}$ なので、$AX = XA$.

(3) $A = cE$ に対して、$AX = cEX = cX, XA = X(cE) = cX$ なので $AX = XA$.

(5) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると、$ZAZ = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$ なので、$ZAZ = A$ ならば $b = c = 0$. 従って、A は対角行列。

(6) 証明：基本ベクトル $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の記号を用いる。$\mathbf{0} = A\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ なので、$a = c = 0$. $\mathbf{0} = A\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ なので、$b = d = 0$. 以上より $A = O$. 証明終わり。

別解：$A\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}, A\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$ をまとめ書きすると、$A[\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0}]$. これは $AE = O$ を意味するので $A = O$. 証明終わり。

背景：線型写像は基底の行き先で決まる、という事実を後期に学習します。

(7) $(A-B)\mathbf{x} = A\mathbf{x} - B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ なので、$A-B$ は (6) の仮定の条件を満たす。従って $A-B = O$ である。$A = B$ が示せた。証明終わり。

(2) と (4)。証明が必要。色々な証明があります。(6) の証明のように X に特別な行列（行列単位）を代入して、いくつかの条件を立てて、それを解く、という方法が普通の方法です。ここ、あとで加筆するかも。

(2) (5) を使うという手もある：(5) の Z に対して $ZA = AZ$ なので両辺に右から Z をかけると $ZAZ = AZ^2 = AE = A$ となる。従って (5) を用いることができて、A が対角行列であることがわかる。

(4) (2) を使うという手もある：A が対角行列であることが (2) からわかる。$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ とする。$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると、$AX = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = aX$, $XA = \begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = dX$. 従って、条件 $AX = XA$ より $aX = dX$. 従って、$a = d$ となり、$A = aE$ はスカラー行列であることが示せた。

背景：(1),(2) はカルタン部分環 (極大トーラス)。(3),(4) は中心 (センター)。

$\boxed{113}$ $\boxed{111}$(2)(4) と同じ方針でできます。これもいろいろな証明方法があります。

方針：$\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$ を基本ベクトル (p35, p68) とすると、$0 = {}^t\mathbf{e}_i A \mathbf{e}_i = a_{ii}$ なので、A の対角成分は 0 である。次に i, j を異なる自然数として $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$ とすると、$0 = {}^t(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j)A(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j) = a_{ii} + a_{ij} + a_{ji} + a_{jj} = a_{ij} + a_{ji}$. 従って、$A$ は交代行列。証明終わり。

方針２：偏極化 (polarization) の手法：$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$ の時に

$$\begin{aligned}
0 &= {}^t(\mathbf{y} + \mathbf{z})A(\mathbf{y} + \mathbf{z}) \\
&= {}^t\mathbf{y}A\mathbf{y} + {}^t\mathbf{y}A\mathbf{z} + {}^t\mathbf{z}A\mathbf{y} + {}^t\mathbf{z}A\mathbf{z} \\
&= {}^t\mathbf{y}A\mathbf{z} + {}^t\mathbf{z}A\mathbf{y} \\
&= {}^t\mathbf{y}A\mathbf{z} + {}^t\mathbf{y}\,{}^tA\mathbf{z} \\
&= {}^t\mathbf{y}(A + {}^tA)\mathbf{z}
\end{aligned}$$

となる。簡単のため $B = A + {}^t\!A$ と置くと、${}^t\mathbf{y}B\mathbf{z} = 0$ が、全ての $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ に対して成り立っている。従って $\boxed{115}$(1) より $B = O$. 従って、A は交代行列。

$\boxed{115}$ (1) ここで $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$, $\mathbf{y} = \mathbf{e}_j$ とすると、$0 = {}^t\mathbf{y}A\mathbf{z} = a_{ij}$ なので $A = O$.

(2) $X = E_{ji}$ を行列単位とすると、$0 = \mathrm{tr}(AE_{ji}) = a_{ij}$ である。従って、$A = O$.

(3) 直接関係している。$E_{ji} = \mathbf{e}_j{}^t\mathbf{e}_i$ であることに注目すると、$\mathrm{tr}(AE_{ji}) = \mathrm{tr}(A\mathbf{e}_j{}^t\mathbf{e}_i) = \mathrm{tr}({}^t\mathbf{e}_iA\mathbf{e}_j) = {}^t\mathbf{e}_iA\mathbf{e}_j$ となる。

背景：secant 多様体。

背景：双対線型空間、キリング形式、フロベニウスノルム。

$\boxed{114}$ (1)

$$
\begin{aligned}
E - Y &= (E+X)(E+X)^{-1} - (E-X)(E+X)^{-1} \\
&= ((E+X) - (E-X))(E+X)^{-1} \\
&= 2X(E+X)^{-1}, \\
E + Y &= (E+X)(E+X)^{-1} + (E-X)(E+X)^{-1} \\
&= ((E+X) + (E-X))(E+X)^{-1} \\
&= 2E(E+X)^{-1} \\
&= 2(E+X)^{-1}.
\end{aligned}
$$

最後の式より $E+Y$ は正則行列で、その逆行列は $(E+Y)^{-1} = \frac{1}{2}(E+X)$ である。従って、$(E-Y)(E+Y)^{-1} = 2X(E+X)^{-1}\frac{1}{2}(E+X) = X$.

(2) まず、(1) を $X = B, Y = A$ に適用すれば、$E + A$ が正則行列であることがわかる。A が直交行列であることを示そう。準備として A の転置行列をまず計算する。

$$
\begin{aligned}
{}^t\!A &= {}^t((E-B)(E+B)^{-1}) \\
&= {}^t((E+B)^{-1}){}^t(E-B) \\
&= (E + {}^t\!B)^{-1}(E - {}^t\!B) \\
&= (E-B)^{-1}(E+B) \\
&= (E+B)(E-B)^{-1}.
\end{aligned}
$$

(なお、ここで下から 2 つ目の等号では、仮定 ${}^t\!B = -B$ を使った。一番下の等号では 2 つの行列 $(E-B)^{-1}$ と $(E+B)$ が可換であることを使った。$E+B$ と $E-B$ が可換なので、教科書 p37, 問題 5(1) が使える状況である。) 従って、${}^t\!AA = (E+B)(E-B)^{-1}(E-B)(E+B)^{-1} = E$ となり、A は直交行列である。証明終わり。

(3)

$$\begin{aligned}
{}^tB &= {}^t((E-A)(E+A)^{-1}) \\
&= {}^t((E+A)^{-1})\,{}^t(E-A) \\
&= (E+{}^tA)^{-1}(E-{}^tA) \\
&= (E+A^{-1})^{-1}(E-A^{-1}) \\
&= (A+E)^{-1}(A-E) \\
&= -(A+E)^{-1}(E-A) \\
&= -(E-A)(E+A)^{-1} \\
&= -B.
\end{aligned}$$

ここで、上から４つ目の等号では ${}^tA = A^{-1}$ を使った。下から２つ目の等号では $(A+E)^{-1}$ と $E-A$ が可換であることを使った。上から５つ目の等号では、$(E+A^{-1})^{-1} = (A^{-1}(A+E))^{-1} = (A+E)^{-1}A$. $A(E-A^{-1}) = A-E$ を使って変形した。

補足 : この結果を読み替える。写像 f を $f(X) := (E-X)(E+X)^{-1}$ と定める。「$E+A$ が正則であるような直交行列 A」の全体と交代行列 B の全体は、全単射写像 $B = f(A)$, およびその逆写像 $A = f(B)$ によって互いに全単射に移りあっている。う、そっか、(2) で「B が交代行列の時に $E+B$ が正則行列であること」も証明しておかないといけなかった。うーん。そうだな。あとで学習する p34 定理 3.4.2 の (4) と (5) が同値であることを使わせてもらうことにしよう。行列 $E+B$ がその定理の条件 (4) すなわち「$(E+B)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ならば $\mathbf{x} = \mathbf{0}$」を満たすことを示す。$(E+B)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ だとする。両辺に左から ${}^t\mathbf{x}$ をかけると、${}^t\mathbf{x}(E+B)\mathbf{x} = {}^t\mathbf{x}\mathbf{0} = 0$ となる。左辺は ${}^t\mathbf{x}E\mathbf{x} + {}^t\mathbf{x}B\mathbf{x}$ となる。B が交代行列なので $\boxed{113}$(1) より第２項は 0 である。一方、第 1 項は ${}^t\mathbf{x}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i^2$ となる。これが 0 になるのは $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ となる時に限る[1]から $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ となって、条件 (4) が確認できた。従って、条件 (5) が成立して、$E+B$ は正則行列である。

背景 : Cayley 変換。

関連 : 絶対値 1 の複素数 $z \neq -1$ と純虚数 $i\beta$ は $i\beta = \dfrac{1-z}{1+z}$, $z = \dfrac{1-i\beta}{1+i\beta}$ によって互いに写りあう。円周から 1 点を取り除いた図形は直線と全単射に移りあう。

[1]問題にしっかりと断っておくべきだったが、この問題では、B は実交代行列であると、仮定する。実際、B が複素交代行列の場合には $E+B$ が正則行列にならないような例があるのだ。例えば、問題 $\boxed{4}$ の交代行列 Y に対しては $E+Y$ は正則行列にはならない。元に戻って B が実行列であると仮定しておくと、定理を使うときの $\mathbf{x}$ も実ベクトルであるから、x_i たちは全て実数である。従って、平方和が 0 であればそれぞれが 0 であることが従う。この辺の議論は、５章の固有値・固有多項式や９章のエルミート行列を学習すると、より理解がしやすくなると思うので、現時点でフォローできなくても差し支えない。

教科書の補足。

- p8 の下から 5 行目。正方行列 A のべき乗 A^n は指数法則 $A^{m+n} = A^m A^n$ を満たす。ここで m, n は自然数。

  さらに $A^0 = E$ と定めれば、指数法則は m, n が 0 以上の整数で成り立つ。

- p10 問題 7 では「A, B が共に冪零である」と仮定しているが、仮定を弱めて、「A, B のどちらか片方が冪零である」としても同じ結論が成り立つ。実際、教科書の巻末 (p196) の証明では $A^m = O$ は使われているが、$B^n = O$ は使われていない。