行列の積, 行列のブロックの練習問題3

version: May 30, 2020; 暫定版、作成中

課題の目標：行列の積に関する問題です。２次とは限らない行列の計算で、行列の積の計算に慣れよう。行列のブロックへの分割を使いこなせるようになろう。

——— ２次の正方行列よりもサイズの大きな行列の積の練習 ———

定義：行列単位 (教科書 p140)

i, j を $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ となるような自然数とする。$m \times n$ 行列で、(i, j) 成分が 1 であり、そのほかの成分は全て 0 であるような行列を行列単位といい、E_{ij} と書く。

例えば、３次正方行列では

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots,$$

$\boxed{51}$ $i \neq j$ とスカラー c に対して、ここだけの記号で、３次正方行列 $P_{ij}, Q_i(c), R_{Ij}(c)$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} P_{ij} &= E + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}, \\ Q_i(c) &= E + (c-1)E_{ii}, \\ R_{ij}(c) &= E + cE_{ij}. \end{aligned}$$

(1) P_{12}, P_{13}, P_{23}, $Q_3(c)$, $R_{21}(c), R_{31}(c)$ を書け。

(2) $P_{ij}^2 = E$ を示せ。

(3) $Q_i(x)Q_i(y) = Q_i(xy)$ を示せ。

(4) $R_{ij}(x)R_{ij}(y) = R_{ij}(x+y)$ を示せ。

(5) $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$, $Q_i(c)^{-1} = Q_i(\frac{1}{c})$, $R_{ij}(c)^{-1} = R_{ij}(-c)$ を示せ。

$\boxed{52}$ $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -5 & 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$,

$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -5 & -7 \end{pmatrix}$,

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -6 \end{pmatrix},\ A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ と定める。

(1) $R_{31}(1)R_{21}(-2)A_1,\ Q_3(\frac{1}{3})A_2,\ P_{23}A_3,\ R_{32}(-1)A_4,\ Q_3(-\frac{1}{6})A_5,\ R_{23}(-1)R_{13}(-2)A_6$ を求めよ。

(2) A_7 を A_1 と P, Q, R たちを (たくさん) 使って表せ。

(3) A_1 を A_7 と P, Q, R たちを (たくさん) 使って表せ。

$\boxed{53}$ $$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$ と定める。

(1) $R_{31}(-1)R_{21}(-2)A_1,\ R_{23}(1)R_{13}(-1)A_2,\ Q_2(-1)A_3,\ R_{12}(-2)A_4$ を求めよ。

(2) A_5 を A_1 と P, Q, R たちを (たくさん) 使って表せ。

(3) A_1 を A_5 と P, Q, R たちを (たくさん) 使って表せ。

(4) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ とする。行列 A^{-1} を P, Q, R たちを (たくさん) 使って表せ。

(5) 行列 A を P, Q, R たちを (たくさん) 使って表せ。

$\boxed{54}$ $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix},$
$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする。P_{ij} または $Q_i(c)$ または $R_{ij}(c)$ の形の 2 次正方行列 B_1 で $B_1A_1 = A_2$ となるものを求めよ。同様に、$B_2A_2 = A_3,\ B_3A_3 = A_4,\ B_4A_4 = A_5$ となるような B_2, B_3, B_4, B_5 を求めよ。

$\boxed{55}$ $$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_7=\begin{pmatrix}1&0&-2&-3\\0&0&1&2\\0&1&1&1\end{pmatrix}, A_8=\begin{pmatrix}1&0&-2&-3\\0&1&1&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}, A_9=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}, A_{10}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$$

とする。P_{ij} または $Q_i(c)$ または $R_{ij}(c)$ の形の 3 次正方行列 B_1 で $B_1A_1=A_2$ となるものを求めよ。同様に、$B_2A_2=A_3$, $B_3A_3=A_4$, $B_4A_4=A_5$, $B_5A_5=A_6, B_6A_6=A_7, B_7A_7=A_8, B_8A_8=A_9, B_9A_9=A_{10}$ となるような $B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, B_9$ を求めよ。

56 今まで、左から基本行列をかける演算をしてきたけれど、次に右から基本行列をかける演算を扱う。$A=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}$ とする。A の第 j 列が $\mathbf{a}_j$ である。次を示せ。

(1) AP_{ij} は A の第 i 列と第 j 列の入れ替えである。

(2) $AQ_j(c)$ は A の第 j 列を c 倍したものである。

(3) $AR_{ij}(c)$ は A の第 j 列に第 i 列の c 倍を足したものである。

57 $A_1=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&3&-1\\0&1&1\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&1&2\\\frac{1}{\sqrt2}&3&-1\\0&1&1\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&-1&2\\\frac{1}{\sqrt2}&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt3}&2\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}&-1\\0&\frac{1}{\sqrt3}&1\end{pmatrix},$

$A_5=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt3}&\frac32\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}&-\frac32\\0&\frac{1}{\sqrt3}&1\end{pmatrix},\ A_6=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt3}&\frac56\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}&-\frac56\\0&\frac{1}{\sqrt3}&\frac53\end{pmatrix},\ A_7=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt6}\\0&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$ とする。

P_{ij} または $Q_i(c)$ または $R_{ij}(c)$ の形の 3 次正方行列 B_1 で $A_1B_1=A_2$ となるものを求めよ。同様に $A_2B_2=A_3, A_3B_3=A_4, A_4B_4=A_5, A_5B_5=A_6, A_6B_6=A_7$ となるような B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 を求めよ。

58 $A=\begin{pmatrix}8&-10\\5&-7\end{pmatrix}$ とし、$\mathbf{p}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ とする。

(1) $A\mathbf{p}_1$ を求めよ。$A\mathbf{p}_2$ を求めよ。

(2) 2 次の正方行列 P を $P=\begin{pmatrix}\mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2\end{pmatrix}$ と定義する。(1) の結果を $A\mathbf{p}_1=P\begin{pmatrix}*\\*\end{pmatrix}$ のように表せ。$A\mathbf{p}_2=P\begin{pmatrix}*\\*\end{pmatrix}$ のように表せ。

(3) 上の (2) の結果をまとめ書きして $AP=PX$ の形に表せ。

59 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&4\\0&0&4\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$. に対して、前問 58 と同じ計算を行い、計算結果を $AP=PX$ の形に表せ。

60 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&4\\-2&-2&-3\end{pmatrix}$ とする。$\mathbf{p}_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$ とする。

(1) $A\mathbf{p}_1$ を求めよ。$A\mathbf{p}_2$ を求めよ。

(2) $\mathbf{b} = A\mathbf{p}_3$ を求めよ。

(3) $\mathbf{b}$ を $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ の 1 次結合で表せ。

(4) $P = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix}$ とする。上記の (1) と (3) の結果を $AP = PX$ の形に、3 次正方行列 X を用いて表せ。

———— 特別な行列 ————

$\boxed{60}$ 教科書 p120, 問題 6.2 の 3(1)(2).

$\boxed{61}$ (1) $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。積 PQ を求めよ。

(2) $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。$P{}^tP$ と ${}^tPP$ を求めよ。

(3) $P_{13}P_{14}P_{34}P_{23}P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

を求めよ。

$\boxed{62}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ とする。A^n を求めよ。

$\boxed{63}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(1) AB を計算せよ。

(2) $AB = E$ となるように x, y, z を a, b, c の式で表せ。

(3) 上の (2) のように x, y, z を決めた時、BA を計算せよ。

$\boxed{64}$ $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。数 $q \neq 0$ に対して、列ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ q + q^{-1} \\ q^2 + 1 + q^{-2} \\ q^3 + q + q^{-1} + q^{-3} \\ q^4 + q^2 + 1 + q^{-2} + q^{-4} \\ q^5 + q^3 + q + q^{-1} + q^{-3} + q^{-5} \end{pmatrix}$

と定める。ベクトル $((q + q^{-1})E - L)\mathbf{x}$ を計算せよ。

$\boxed{65}$ $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とし、$A = 2E - L$ とする。

(1) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 12 & 8 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 & 15 & 18 & 12 & 6 & 9 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 24 & 16 & 8 & 12 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 20 & 10 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 14 & 7 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 10 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ とする。AB, BA を求めよ。

(2) 数 $q \neq 0$ に対して、列ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ q + q^{-1} \\ q^2 + 1 + q^{-2} \\ q^3 + q + q^{-1} + q^{-3} \\ q^4 + q^2 + 1 + q^{-2} + q^{-4} \\ q^7 + q^5 + q^{-5} + q^{-7} \\ q^6 + q^{-6} \\ -q^7 + q^3 + q + q^{-1} + q^{-3} - q^{-7} \end{pmatrix}$ と定める。列ベクトル $((q + q^{-1})E - L)\mathbf{x}$ を計算せよ。

$\boxed{27}$ (viii)($\boxed{27}$ の追加問題) A を 2 次の正方行列とする。$A^2 = E$ を満たす行列を列挙せよ。

$\boxed{120}$ (1) 行ベクトル $\mathbf{a}$ が「全ての列ベクトル $\mathbf{x}$ に対して $\mathbf{ax} = 0$ を満たしている」ならば、$\mathbf{a} = \mathbf{0}$ であることを示せ。

(2) 行列 A が「全ての列ベクトル $\mathbf{x}$ に対して $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たしている」ならば、$A = O$ であることを示せ。

(3) 行列 A, B が「全ての列ベクトル $\mathbf{x}$ に対して $A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$ を満たしている」ならば、$A = B$ であることを示せ。

$\boxed{121}$ 「$AB = E$ ならば $BA = E$」という定理をまだ知らないとする。行列の積が結合則を満たすことは知っているとする。この時、$AB = E$ かつ $BC = E$ であれば $A = C$ であることを示せ。