行列の積, 行列のブロックの練習問題3

version: May 22, 2020; 暫定版、作成中

課題の目標：行列の積に関する問題です。２次とは限らない行列の計算で、行列の積の計算に慣れよう。行列のブロックへの分割を使いこなせるようになろう。

——— ２次の正方行列よりもサイズの大きな行列の積の練習 ———

定義：行列単位 (教科書 p140)

i, j を $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ となるような自然数とする。$m \times n$ 行列で、(i, j) 成分が 1 であり、そのほかの成分は全て 0 であるような行列を行列単位といい、E_{ij} と書く。

例えば、３次正方行列では

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots,$$

$\boxed{51}$ $i \neq j$ とスカラー c に対して、ここだけの記号で、３次正方行列 $P_{ij}, Q_i(c), R_{Ij}(c)$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} P_{ij} &= E + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}, \\ Q_i(c) &= E + (c-1)E_{ii}, \\ R_{ij}(c) &= E + cE_{ij}. \end{aligned}$$

(1) P_{12}, P_{13}, P_{23}, $Q_3(c)$, $R_{21}(c), R_{31}(c)$ を書け。

(2) $P_{ij}^2 = E$ を示せ。

(3) $Q_i(x)Q_i(y) = Q_i(xy)$ を示せ。

(4) $R_{ij}(x)R_{ij}(y) = R_{ij}(x+y)$ を示せ。

(5) $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$, $Q_i(c)^{-1} = Q_i(\frac{1}{c})$, $R_{ij}(c)^{-1} = R_{ij}(-c)$ を示せ。

$\boxed{52}$ $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -5 & 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -5 & -5 \\ -1 & 3 & -5 & 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}$,

$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -5 & -7 \end{pmatrix}$,

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -6 \end{pmatrix},\ A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ と定める。

(1) $R_{31}(1)R_{21}(-2)A_1$, $Q_3(\frac{1}{3})A_2$, $P_{23}A_3$, $R_{32}(-1)A_4$, $Q_3(-\frac{1}{6})A_5$, $R_{23}(-1)R_{13}(-2)A_6$ を求めよ。

(2) A_7 を A_1 と P, Q, R たちを (たくさん) 使って表せ。

(3) A_1 を A_7 と P, Q, R たちを (たくさん) 使って表せ。

$\boxed{53}$ $$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$ と定める。

(1) $R_{31}(-1)R_{21}(-2)A_1$, $R_{23}(1)R_{13}(-1)A_2$, $Q_2(-1)A_3$, $R_{12}(-2)A_4$ を求めよ。

(2) A_5 を A_1 と P, Q, R たちを (たくさん) 使って表せ。

(3) A_1 を A_5 と P, Q, R たちを (たくさん) 使って表せ。

(4) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ とする。行列 A^{-1} を P, Q, R たちを (たくさん) 使って表せ。

(5) 行列 A を P, Q, R たちを (たくさん) 使って表せ。

$\boxed{54}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ とする。A^n を求めよ。

$\boxed{55}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(1) AB を計算せよ。

(2) $AB = E$ となるように x, y, z を a, b, c の式で表せ。

(3) 上の (2) のように x, y, z を決めた時、BA を計算せよ。

$\boxed{61}$ $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。数 $q \neq 0$ に対して、列ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ q+q^{-1} \\ q^2+1+q^{-2} \\ q^3+q+q^{-1}+q^{-3} \\ q^4+q^2+1+q^{-2}+q^{-4} \\ q^5+q^3+q+q^{-1}+q^{-3}+q^{-5} \end{pmatrix}$ と定める。ベクトル $((q+q^{-1})E-L)\mathbf{x}$ を計算せよ。

$\boxed{62}$ $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とし、$A = 2E - L$ とする。

(1) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 12 & 8 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 & 15 & 18 & 12 & 6 & 9 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 24 & 16 & 8 & 12 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 20 & 10 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 14 & 7 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 10 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ とする。AB, BA を求めよ。

(2) 数 $q \neq 0$ に対して、列ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ q+q^{-1} \\ q^2+1+q^{-2} \\ q^3+q+q^{-1}+q^{-3} \\ q^4+q^2+1+q^{-2}+q^{-4} \\ q^7+q^5+q^{-5}+q^{-7} \\ q^6+q^{-6} \\ -q^7+q^3+q+q^{-1}+q^{-3}-q^{-7} \end{pmatrix}$ と定める。列ベクトル $((q+q^{-1})E-L)\mathbf{x}$ を計算せよ。

素材置き場：この後は問題を追加するので、番号がズレると思います。整理してから番号をつけます。

$\boxed{120}$ (1) 行ベクトル $\mathbf{a}$ が「全ての列ベクトル $\mathbf{x}$ に対して $\mathbf{ax} = 0$ を満たしている」ならば、$\mathbf{a} = \mathbf{0}$ であることを示せ。

(2) 行列 A が「全ての列ベクトル $\mathbf{x}$ に対して $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たしている」ならば、$A = O$ であることを示せ。

(3) 行列 A, B が「全ての列ベクトル $\mathbf{x}$ に対して $A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$ を満たしている」ならば、$A = B$ であることを示せ。

$\boxed{121}$ 「$AB = E$ ならば $BA = E$」という定理をまだ知らないとする。行列の積が結合則を満たすことは知っているとする。この時、$AB = E$ かつ $BC = E$ であれば $A = C$ であることを示せ。

$ABC = A(BC) = AE = A$, $ABC = (AB)C = EC = C$. 証明終わり。

$\boxed{27}$ (viii)(追加問題) A を 2 次の正方行列とする。$A^2 = E$ を満たす行列を列挙せよ。

答え：$ps - qr = 1$ となるような p, q, r, s を用いて、$A = \begin{pmatrix} 2ps-1 & -2pq \\ 2rs & -2qr-1 \end{pmatrix}$ と書ける。

証明：$B = (E+A)/2$ と定める。$A = 2B - E$ と同値である。この時、$A^2 = E$ と、$B^2 = B$ は同値である。つまり、$A^2 = E$ と B が射影行列であることは同値である。射影行列は (vii) に列挙したので、その結果を用いることができる。従って、$ps - qr = 1$ となるような p, q, r, s を用いて、$B = \begin{pmatrix} ps & -pq \\ rs & -qr \end{pmatrix}$ と書ける。ゆえに $A = \begin{pmatrix} 2ps-1 & -2pq \\ 2rs & -2qr-1 \end{pmatrix}$ と書ける。

なお、答え（= 表し方）は一通りではありません。$\boxed{27}$ の他の問題の答え（表し方）も一意的ではありません。

- 三角行列の逆行列を求めよ。