行列の積の練習問題3の解答例

version: May 23, 2020; 作成中

お願い：解答に誤りを見つけたり、説明がわかりづらい点があれば、落合まで連絡してください。改訂します。

$\boxed{51}$ (1) $P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q_3(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$,

$R_{21}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R_{31}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) (3)(4) 略。

(5) 方針：$P_{ij}^{-1} = P_{ij}$ は (2) より従う。(3) より $Q_i(c)Q_i(\frac{1}{c}) = E$, $Q_i(\frac{1}{c})Q_i(c) = E$ を示す。(4) より $R_{ij}(c)R_{ij}(-c) = E$, $R_{ij}(-c)R_{ij}(c) = E$ を示す。

$\boxed{52}$ (1) 答え：$R_{31}(1)R_{21}(-2)A_1 = A_2$, $Q_3(\frac{1}{3})A_2 = A_3$, $P_{23}A_3 = A_4$, $R_{32}(-1)A_4 = A_5$, $Q_3(-\frac{1}{6})A_5 = A_6$, $R_{23}(-1)R_{13}(-2)A_6 = A_7$.

(2)

$$\begin{aligned} A_7 &= R_{23}(-1)R_{13}(-2)A_6 \\ &= R_{23}(-1)R_{13}(-2)Q_3(-\tfrac{1}{6})A_5 \\ &= R_{23}(-1)R_{13}(-2)Q_3(-\tfrac{1}{6})R_{32}(-1)A_4 \\ &= R_{23}(-1)R_{13}(-2)Q_3(-\tfrac{1}{6})R_{32}(-1)P_{23}A_3 \\ &= R_{23}(-1)R_{13}(-2)Q_3(-\tfrac{1}{6})R_{32}(-1)P_{23}Q_3(\tfrac{1}{3})A_2 \\ &= R_{23}(-1)R_{13}(-2)Q_3(-\tfrac{1}{6})R_{32}(-1)P_{23}Q_3(\tfrac{1}{3})R_{31}(1)R_{21}(-2)A_1. \end{aligned}$$

(3) 答え：$A_7 = R_{23}(-1)R_{13}(-2)Q_3(-\frac{1}{6})R_{32}(-1)P_{23}Q_3(\frac{1}{3})R_{31}(1)R_{21}(-2)A_1$ なので、

$$\begin{aligned} A_1 &= R_{21}(-2)^{-1}R_{31}(1)^{-1}Q_3(\tfrac{1}{3})^{-1}P_{23}^{-1}R_{32}(-1)^{-1}Q_3(-\tfrac{1}{6})^{-1}R_{13}(-2)^{-1}R_{23}(-1)^{-1}A_7 \\ &= R_{21}(2)R_{31}(-1)Q_3(3)P_{23}R_{32}(1)Q_3(-6)R_{13}(2)R_{23}(1)A_7. \end{aligned}$$

一つ目の等号では $\boxed{109}$ を用いた。２つ目の等号では $\boxed{51}$(5) を用いた。

素材：教科書 p33 問題 2.3 の 1(5)。

背景：簡約化の手続きを左から基本行列をかけることで表せる、という事実の反映です。

$\boxed{53}$ (1) $R_{31}(-1)R_{21}(-2)A_1 = A_2$, $R_{23}(1)R_{13}(-1)A_2 = A_3$, $Q_2(-1)A_3 = A_4$, $R_{12}(-2)A_4 = A_5$.

(2)

$$\begin{aligned}A_5 &= R_{12}(-2)A_4\\ &= R_{12}(-2)Q_2(-1)A_3\\ &= R_{12}(-2)Q_2(-1)R_{23}(1)R_{13}(-1)A_2\\ &= R_{12}(-2)Q_2(-1)R_{23}(1)R_{13}(-1)R_{31}(-1)R_{21}(-2)A_1.\end{aligned}$$

(3) $A_5 = R_{12}(-2)Q_2(-1)R_{23}(1)R_{13}(-1)R_{31}(-1)R_{21}(-2)A_1$ なので、

$$\begin{aligned}A_1 &= R_{21}(-2)^{-1}R_{31}(-1)^{-1}R_{13}(-1)^{-1}R_{23}(1)^{-1}Q_2(-1)^{-1}R_{12}(-2)^{-1}A_5\\ &= R_{21}(2)R_{31}(1)R_{13}(1)R_{23}(-1)Q_2(-1)R_{12}(2)A_5.\end{aligned}$$

一つ目の等号では $\boxed{109}$ を用いた。２つ目の等号では $\boxed{51}$(5) を用いた。

(4) (5) $A_1 = [A \quad E], A_5 = [E \quad A^{-1}]$ となっていることに着目する。(2) の答え $A_5 = BA_1$ をこのブロック分けに着目して書くと、$[E \quad A^{-1}] = B[A \quad E] = [BA \quad BE] = [BA \quad B]$ となるので、右３列を取り出すと、$A^{-1} = B$ となる。同じく (3) の答え $A_1 = CA_5$ をこのブロック分けに着目して書くと、$[A \quad E] = C[E \quad A^{-1}] = [CE \quad CA^{-1}] = [C \quad CA^{-1}]$ となるので左３列を取り出すと $A = C$ となる。従って、

$$\begin{aligned}A^{-1} &= R_{12}(-2)Q_2(-1)R_{23}(1)R_{13}(-1)R_{31}(-1)R_{21}(-2),\\ A &= R_{21}(2)R_{31}(1)R_{13}(1)R_{23}(-1)Q_2(-1)R_{12}(2).\end{aligned}$$

素材は教科書 p36 例題 2.4.1。

背景：簡約化を用いて逆行列を求める手続きを左から基本行列をかけることで表せる、という事実の反映です。

$\boxed{54}$ 答え：$B_1 = R_{12}(-2)$, $B_2 = R_{21}(2)$, $B_3 = P_{12}$, $B_4 = Q_2(-1)$.

素材：教科書 p20 の中ほどの計算例。連立 1 次方程式の掃き出し法。

$\boxed{55}$ 答え：$B_1 = R_{13}(-2)$, $B_2 = R_{23}(1)$, $B_3 = P_{13}$, $B_4 = R_{13}(-1)$, $B_5 = R_{23}(-3)$, $B_6 = Q_2(-\frac{1}{2})$, $B_7 = P_{23}$, $B_8 = R_{13}(2)$, $B_9 = R_{23}(-1)$.

素材：教科書 p21, 例題 2.1.1.

$\boxed{56}$

$\boxed{57}$ 答え：$B_1 = Q_1(\frac{1}{\sqrt{2}})$, $B_2 = R_{12}(-2\sqrt{2})$, $B_3 = Q_2(\frac{1}{\sqrt{3}})$, $B_4 = R_{13}(-\frac{1}{\sqrt{2}})$, $B_5 = R_{23}(\frac{2}{\sqrt{3}})$, $B_6 = Q_3(\frac{\sqrt{6}}{5})$.

素材：教科書 p117, 例題 6.2.1。

背景：シュミットの直交化法。

$\boxed{58}$ (1) $A\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2\mathbf{p}_1$, $A\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\mathbf{p}_2$,

(2) $A\mathbf{p}_1 = P\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\mathbf{p}_2 = P\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(3) $A\begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ なので、$AP = P\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

素材：p100 例題 5.3.1, p106 例題 5.4.1.

背景：対角化。

$\boxed{59}$ $AP = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

素材：p103-104 例題 5.3.2。

$\boxed{60}$ (1) $A\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1$, $A\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_2$,

(2) $\mathbf{b} = A\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{13}{\sqrt{6}} \\ -\frac{10}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

(3) $\mathbf{b} = c_1\mathbf{p}_1 + c_2\mathbf{p}_2 + c_3\mathbf{p}_3$ を c_1, c_2, c_3 に関する連立 1 次方程式と見て解くと (まだ範囲外ですね)、$c_1 = 2\sqrt{3}, c_2 = -4\sqrt{2}, c_3 = -1$ となる。

(4) $A\mathbf{p}_1 = P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\mathbf{p}_2 = P\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\mathbf{p}_3 = P\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ -4\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ となる。これをまとめ書きして

$A\begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 1 & -4\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる。ので、$AP = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 1 & -4\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる。

補足：P が正則行列であることを用いると、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 1 & -4\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ と書くこともできる。P が直交行列であることを用いると ${}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 1 & -4\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ と書くこともできる。

素材：教科書 p123 例題 6.3.1。

———— 特別な行列 ————

$\boxed{61}$ (1) 答え：$PQ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $P{}^tP = E, {}^tPP = E.$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

素材：置換行列。(1) p39 例３。(2) p39 例４。(3) p40 の下から７行目。

補足：(2) 特に P は直交行列であり、P の逆行列は $P^{-1} = {}^tP$ で与えることができる。簡単！

$\boxed{62}$ $A^2 = 4$。従って、n が偶数の時 $A^n = 2^n E$. n が奇数の時 $A^n = 2^{n-1}A$.

背景：２量子ビットのアダマール行列。

$\boxed{63}$ (1) $AB = \begin{pmatrix} 1 & a+x & b+y+az \\ 0 & 1 & c+z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $x = -a, z = -c, y = -b + ac.$

(3) $BA = E.$

背景：ハイゼンベルク群。

$\boxed{64}$ 答え：$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ q^6 + q^4 + q^2 + 1 + q^{-2} + q^{-4} + q^{-6} \end{pmatrix} = \dfrac{q^7 - q^{-7}}{q - q^{-1}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

背景：グラフ・ラプラシアン（グラフのラプラス作用素）の固有関数。$q = \cos(\frac{k}{7}\pi) + i\sin(\frac{k}{7}\pi)$ とすると結果が零ベクトルになることがあり、それを利用します。なお、行列のサイズはいくつでも類似の事実が成り立ちます。

$\boxed{65}$ (1) $AB = E, BA = E.$

(2) $$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (q^8+q^6-q^2-1-q^{-2}+q^{-6}+q^{-8}) \\ 0 \\ -(q^8+q^6-q^2-1-q^{-2}+q^{-6}+q^{-8}) \end{pmatrix} = (q^8+q^6-q^2-1-q^{-2}+q^{-6}+q^{-8}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

背景：L を tree $T_{2,3,5}$ のラプラシアンといいます。

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ は E_8 型のカルタン行列と呼ばれるものです。ルート系に深く関係し、代数群、組み合わせ論、代数幾何など多彩な分野に登場します。(2) に出てきた多項式は 30 次の円分多項式

$$\frac{(x^{30}-1)(x^5-1)(x^3-1)(x^2-1)}{(x^{15}-1)(x^{10}-1)(x^6-1)(x-1)} = \frac{(x^{15}+1)(x+1)}{(x^5+1)(x^3+1)} = x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+x+1$$

に $x=q^2$ を代入して q^8 で割り算した相反多項式です。30 は E_8 のコクセター数です。なお、問題 $\boxed{62}$ のタイプの行列はサイズを 8 よりも大きくすると性質が大きく異なります。

$\boxed{27}$ (viii) 答え：$ps-qr=1$ となるような p,q,r,s を用いて、$A = \begin{pmatrix} 2ps-1 & -2pq \\ 2rs & -2qr-1 \end{pmatrix}$ と書ける。

補足：答え（＝書き表し方）は一通りではありません。

証明：$B=(E+A)/2$ と定める。$A=2B-E$ と同値である。この時、$A^2=E$ と、$B^2=B$ は同値である。つまり、$A^2=E$ と B が射影行列であることは同値である。射影行列は (vii) に列挙したので、その結果を用いることができる。従って、$ps-qr=1$ となるような p,q,r,s を用いて、$B = \begin{pmatrix} ps & -pq \\ rs & -qr \end{pmatrix}$ と書ける。ゆえに $A = \begin{pmatrix} 2ps-1 & -2pq \\ 2rs & -2qr-1 \end{pmatrix}$ と書ける。

$\boxed{120}$ (1) $\mathbf{x}=\mathbf{e}_j$ を基本ベクトル (p35, p68) とする。この時、$0=\mathbf{a}\mathbf{e}_j=a_j$ なので、$a_j=0$。従って、$\mathbf{a}=\mathbf{0}$ である。

(2) A の第 i 行の行ベクトルが $\mathbf{a}_i$ であるとする。すなわち、$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}$ であるとする。この時 $A\mathbf{x}$ の第 i 成分は $\mathbf{a}_i\mathbf{x}$ である。(1) より $\mathbf{a}_i = \mathbf{0}$ である。従って、$A = O$ である。

(3) $(A - B)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ となるので、(2) より $A - B = O$ となる。従って、$A = B$ である。

$\boxed{121}$ $ABC = A(BC) = AE = A$, $ABC = (AB)C = EC = C$. 証明終わり。