行列の積の練習問題3の解答例

version: May 22, 2020; 作成中

使い方の注意：「背景」に書いた内容には、ずっと後で学習する内容を含んでいます。したがって、「背景」に書いた内容を現時点で全く理解できなくても構いません。気にしないように。興味を持った人が関連事項を検索するときに便利なように、キーワードを挙げる目的で「背景」を書いています。気にしないように（２回目）。

お願い：解答に誤りを見つけたり、説明がわかりづらい点があれば、落合まで連絡してください。改訂します。

$\boxed{51}$ (1) $P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q_3(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$,

$R_{21}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R_{31}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) (3)(4) 略。

(5) 方針：$P_{ij}^{-1} = P_{ij}$ は (2) より従う。(3) より $Q_i(c)Q_i(\frac{1}{c}) = E$, $Q_i(\frac{1}{c})Q_i(c) = E$ を示す。(4) より $R_{ij}(c)R_{ij}(-c) = E$, $R_{ij}(-c)R_{ij}(c) = E$ を示す。

$\boxed{52}$ (1) 答え：$R_{31}(1)R_{21}(-2)A_1 = A_2$, $Q_3(\frac{1}{3})A_2 = A_3$, $P_{23}A_3 = A_4$, $R_{32}(-1)A_4 = A_5$, $Q_3(-\frac{1}{6})A_5 = A_6$, $R_{23}(-1)R_{13}(-2)A_6 = A_7$.

(2) $A_7 = R_{23}(-1)R_{13}(-2)A_6 = R_{23}(-1)R_{13}(-2)Q_3(-\frac{1}{6})A_5 = R_{23}(-1)R_{13}(-2)Q_3(-\frac{1}{6})R_{32}(-1)A_4 = R_{23}(-1)R_{13}(-2)Q_3(-\frac{1}{6})R_{32}(-1)P_{23}A_3 = R_{23}(-1)R_{13}(-2)Q_3(-\frac{1}{6})R_{32}(-1)P_{23}Q_3(\frac{1}{3})A_2 = R_{23}(-1)R_{13}(-2)Q_3(-\frac{1}{6})R_{32}(-1)P_{23}Q_3(\frac{1}{3})R_{31}(1)R_{21}(-2)A_1$.

(3) 答え：$A_7 == R_{23}(-1)R_{13}(-2)Q_3(-\frac{1}{6})R_{32}(-1)P_{23}Q_3(\frac{1}{3})R_{31}(1)R_{21}(-2)A_1$.
$A_1 = R_{21}(-2)^{-1}R_{31}(1)^{-1}Q_3(\frac{1}{3})^{-1}P_{23}^{-1}R_{32}(-1)^{-1}Q_3(-\frac{1}{6})^{-1}R_{13}(-2)^{-1}R_{23}(-1)^{-1}A_7 = R_{21}(2)R_{31}(-1)Q_3(3)P_{23}R_{32}(1)Q_3(-6)R_{13}(2)R_{23}(1)A_7$.

背景：簡約化の手続きを左から基本行列をかけることで表せる、という事実の反映です。題材は教科書 p33 問題 2.3 の 1(5) から取りました。

$\boxed{53}$ (1) 答え:$R_{31}(-1)R_{21}(-2)A_1 = A_2$, $R_{23}(1)R_{13}(-1)A_2 = A_3$, $Q_2(-1)A_3 = A_4$, $R_{12}(-2)A_4 = A_5$.

(2) $A_5 = R_{12}(-2)A_4 = R_{12}(-2)Q_2(-1)A_3 = R_{12}(-2)Q_2(-1)R_{23}(1)R_{13}(-1)A_2 = R_{12}(-2)Q_2(-1)R_{23}(1)$

(3) $A_5 = R_{12}(-2)Q_2(-1)R_{23}(1)R_{13}(-1)R_{31}(-1)R_{21}(-2)A_1$ なので、$A_1 = R_{21}(-2)^{-1}R_{31}(-1)^{-1}R_{13}(-1)^{-}$
$R_{21}(2)R_{31}(1)R_{13}(1)R_{23}(-1)Q_2(-1)R_{12}(2)A_5$.

(4) (5) $A_1 = [A \quad E], A_5 = [E \quad A^{-1}]$ となっていることに着目する。(2) の答え $A_5 = BA_1$ をこのブロック分けに着目して書くと、$[E \quad A^{-1}] = B[A \quad E] = [BA \quad BE] = [BA \quad B]$ となるので、右３列を取り出すと、$A^{-1} = B$ となる。同じく (3) の答え $A_1 = CA_5$ をこのブロック分けに着目して書くと、$[A \quad E] = C[E \quad A^{-1}] = [CE \quad CA^{-1}] = [C \quad CA^{-1}]$ となるので左３列を取り出すと $A = C$ となる。従って、$A^{-1} = R_{12}(-2)Q_2(-1)R_{23}(1)R_{13}(-1)R_{31}(-1)R_{21}(-$
$A = R_{21}(2)R_{31}(1)R_{13}(1)R_{23}(-1)Q_2(-1)R_{12}(2)$.

背景：簡約化を用いて逆行列を求める手続きを左から基本行列をかけることで表せる、という事実の反映です。題材は教科書 p36 例題 2.4.1 から取りました。

$\boxed{54}$ $A^2 = 4$。従って、n が偶数の時 $A^n = 2^n E$. n が奇数の時 $A^n = 2^{n-1}A$.

背景：２量子ビットのアダマール行列。

$\boxed{55}$ (1) $AB = \begin{pmatrix} 1 & a+x & b+y+az \\ 0 & 1 & c+z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $x = -a, z = -c, y = -b + ac$.

(3) $BA = E$.

背景：ハイゼンベルク群。

$\boxed{61}$ 答え： $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ q^6 + q^4 + q^2 + 1 + q^{-2} + q^{-4} + q^{-6} \end{pmatrix} = \dfrac{q^7 - q^{-7}}{q - q^{-1}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

背景：グラフ・ラプラシアン（グラフのラプラス作用素）の固有関数。$q = \cos(\frac{k}{7}\pi) + i\sin(\frac{k}{7}\pi)$ とすると結果が零ベクトルになることがあり、それを利用します。なお、行列のサイズはいくつでも類似の事実が成り立ちます。

$\boxed{62}$ (1) $AB = E, BA = E$.

(2) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (q^8 + q^6 - q^2 - 1 - q^{-2} + q^{-6} + q^{-8}) \\ 0 \\ -(q^8 + q^6 - q^2 - 1 - q^{-2} + q^{-6} + q^{-8}) \end{pmatrix} = (q^8 + q^6 - q^2 - 1 - q^{-2} + q^{-6} + q^{-8}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

背景：L を tree $T_{2,3,5}$ のラプラシアンといいます。

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ は E_8 型のカルタン行列と呼ばれるものです。ルート系に深く関係し、代数群、組み合わせ論、代数幾何など多彩な分野に登場します。(2) に出てきた多項式は 30 次の円分多項式

$$\frac{(x^{30}-1)(x^5-1)(x^3-1)(x^2-1)}{(x^{15}-1)(x^{10}-1)(x^6-1)(x-1)} = \frac{(x^{15}+1)(x+1)}{(x^5+1)(x^3+1)} = x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+x+1$$

に $x=q^2$ を代入して q^8 で割り算した相反多項式です。30 は E_8 のコクセター数です。なお、問題 $\boxed{62}$ のタイプの行列はサイズを 8 よりも大きくすると性質が大きく異なります。