練習問題5の解答例

version: June 29, 2020, 暫定版

お願い：解答に誤りを見つけたり、説明がわかりづらい点があれば、落合まで連絡してください。改訂します。

$\boxed{71}$ 意味がわかると明らかっぽいので答案が書きづらい。また、問題文 (a) と (b) で σ が異なる意味で使われているので、記号を分けたほうが答案が書きやすい。

(a)⇒(b)
- σ が $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ を $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ に移すこと。σ は単射なので、$i < n$ ならば、$\sigma(i)$ と $\sigma(n) = n$ は異なる。したがって $\sigma(i) < n$ である。
- $\sigma : \{1, 2, \ldots, n-1, n\} \to \{1, 2, \ldots, n-1, n\}$ が単射なので、$\sigma : \{1, 2, \ldots, n-1\} \to \{1, 2, \ldots, n-1\}$ も単射。
- $\sigma : \{1, 2, \ldots, n-1, n\} \to \{1, 2, \ldots, n-1, n\}$ は全射なので、任意の $i < n$ に対して、$\sigma(j) = i$ となる $j \leq n$ が存在する。$\sigma(j) = i < n = \sigma(n)$ なので、σ が単射だから $j < n$ である。したがって、$\sigma : \{1, 2, \ldots, n-1\} \to \{1, 2, \ldots, n-1\}$ は全射。

(b)⇒(a) $\sigma : \{1, 2, \ldots, n-1, n\} \to \{1, 2, \ldots, n-1, n\}$ は全射なので、$\sigma(i) = n$ となるような $i \leq n$ が存在する。仮定 (b) より、$i < n$ に対しては、$\sigma(i) < n$ である。したがって、$\sigma(n) = n$ である。

コメント：要素の個数が等しい ($n-1$ 個) 集合上の単射は全射である、とか、全射は単射である、という事実を使うと、全射または単射のどちらかだけを証明する、という省力化は可能である。

コメント：実は、$\sigma : \{1, 2, \ldots, n-1, n\} \to \{1, 2, \ldots, n-1, n\}$ と $\sigma : \{1, 2, \ldots, n-1\} \to \{1, 2, \ldots, n-1\}$ をどちらも同じ σ で書くのはやや混乱の原因となる。σ の定義域を制限したものを τ と書いて、$\sigma : \{1, 2, \ldots, n-1, n\} \to \{1, 2, \ldots, n-1, n\}$, $\tau : \{1, 2, \ldots, n-1\} \to \{1, 2, \ldots, n-1\}$ と書き分けた方が、よりしっかりとした記述になる。

$\boxed{72}$ 1 と n の役割を入れ替えれば、$\boxed{71}$になる。

$\boxed{73}$ $f \circ f : S_n \to S_n$ が恒等写像であることを示せば良い。
$(f \circ f)(\sigma) = f(f(\sigma)) = f(\sigma^{-1}) = (\sigma^{-1})^{-1} = \sigma$. 証明終わり。

$\boxed{74}$ $f \circ f : S_n \to S_n$ が恒等写像であることを示せば良い。
$(f \circ f)(\sigma) = f(f(\sigma)) = f(\sigma\rho) = (\sigma\rho)\rho = \sigma(\rho\rho) = \sigma\varepsilon = \sigma$. 証明終わり。

$\boxed{75}$ **2**(1) 15, (2) 8,　**3**(1) 7, (2) 6, (3) 6, (4) 9, (5) 17.　計算過程はビデオを参照。

コメント：間違ってたら教えてね。

$\boxed{76}$ 答え：$l(\sigma) = 2(j-i) - 1$.

証明：絵を描くことで

$$I(\sigma) = \{(i,j)\} \cup \{(i,k) \mid i < k < j\} \cup \{(k,j) \mid i < k < j\}$$

がわかる。計算過程はビデオを参照。

$\boxed{77}$ $A \cap B = \emptyset$ の時、$A \cup B = A \sqcup B$ と書くことにする。$M = \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq n\}$ と書く。この時、どこで、入れ替えが起こるか（紐が交差するか）に着目して場合分けをすると、

$$\begin{aligned}
I(\sigma\tau) &= \{(i,j) \mid i,j \in M, i < j, \sigma(\tau(i)) > \sigma(\tau(j))\} \\
&= \{(i,j) \mid i,j \in M, i < j, \sigma(\tau(i)) > \sigma(\tau(j)), \tau(i) > \tau(j)\} \\
&\quad \sqcup \{(i,j) \mid i,j \in M, i < j, \sigma(\tau(i)) > \sigma(\tau(j)), \tau(i) < \tau(j)\}, \\
I(\tau) &= \{(i,j) \mid i,j \in \mathbb{N}, 1 \leq i < j \leq n, \tau(i) > \tau(j))\} \\
&= \{(i,j) \mid i,j \in M, i < j, \tau(i) > \tau(j)\} \\
&= \{(i,j) \mid i,j \in M, i < j, \tau(i) > \tau(j), \sigma(\tau(i)) > \sigma(\tau(j))\} \\
&\quad \sqcup \{(i,j) \mid i,j \in M, i < j, \tau(i) > \tau(j), \sigma(\tau(i)) < \sigma(\tau(j))\}, \\
I(\sigma) &= \{(p,q) \mid p,q \in M, p < q, \sigma(p) > \sigma(q))\} \\
&= \{(s,t) \mid s,t \in M, \tau(s) < \tau(t), \sigma(\tau(s)) > \sigma(\tau(t))\} \\
&= \{(s,t) \mid s,t \in M, \tau(s) < \tau(t), \sigma(\tau(s)) > \sigma(\tau(t)), s < t\} \\
&\quad \sqcup \{(s,t) \mid s,t \in M, \tau(s) < \tau(t), \sigma(\tau(s)) > \sigma(\tau(t)), s > t\} \\
&= \{(i,j) \mid i,j \in M, \tau(i) < \tau(j), \sigma(\tau(i)) > \sigma(\tau(j)), i < j\} \\
&\quad \sqcup \{(j,i) \mid j,i \in M, \tau(j) < \tau(i), \sigma(\tau(j)) > \sigma(\tau(i)), j > i\}
\end{aligned}$$

となる。すなわち、

$$I(\sigma\tau) = I_1 \sqcup I_2, \qquad I(\tau) = I_1 \sqcup I_3, \qquad I(\sigma) = I_2 \sqcup I_3$$

となっている。集合 A の元の個数を $\sharp A$ と書くことにする。すると、

$$l(\sigma) + l(\tau) - l(\sigma\tau) = (\sharp I_1 + \sharp I_3) + (\sharp I_2 + \sharp I_3) - (\sharp I_1 + \sharp I_2) = 2\sharp I_3$$

となる。

$\boxed{78}$ (1) $\sigma = (i\ i+1)$ の時、$I(\sigma) = \{(i, i+1)\}$ である。これは $\boxed{76}$ の特別な場合に当たる。絵を描けば、i と $i+1$ を結ぶ隣り合う線だけが X 字に交わっているので交点の個数は 1 つである。

(2) 方針：交点の個数が一つとなるような交わりは隣り合った線が 1 箇所だけ交わる時に限る。

$\boxed{79}$ (a) 「$I(\sigma\tau)$ は $I(\sigma)$ から $(i, i+1)$ を取り除いた集合である」ことを示す。ビデオを参照。

(b) 「$I(\sigma)$ は $I(\sigma\tau)$ から $(i, i+1)$ を取り除いた集合である」ことを示す。あるいは、$\sigma\tau$ に対して $\boxed{79}$(a) を適用することができる、という議論も可能。ビデオを参照。

$\boxed{80}$ 方針 : $l(\sigma)$ に関する数学的帰納法。$l(\sigma) = 0$ の時は $\sigma = \varepsilon$ である。この時は、「0 個の積」に意味をつけることが悩ましいので除外しよう。$l(\sigma) = 1$ の時は、$\boxed{78}$(2) が使える。$l(\sigma) = m$ まで成り立っているときに $l(\sigma) = m+1$ の時を示す。$\boxed{79}$ を用いる。