練習問題 6 の解答例

version: July 21, 2020

お願い：解答に誤りを見つけたり、説明がわかりづらい点があれば、落合まで連絡してください。改訂します。

$\boxed{81}$ (1) と (2) は $(a-b)(b-c)(c-a)$.

(3) と (4) は $(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$.

(5) は $2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$.

(6) は $(a+b+c)^2(a-b)(b-c)(c-a)$.

コメント：多項式の次数や対称性の情報を使うと、結果の意味がわかりやすい。

転置行列の行列式が同じであることを使って良い。

元のファンデルモンド行列式 (例題 3.5.1, p60) を効果的に利用できると良い。

$\boxed{82}$ $x^6+a_1x^5+a_2x^4+a_3x^3+a_4x^2+a_5x+a_6 = x^n+\sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}x^i.$

背景：どんな多項式も、ある行列の固有多項式である。

背景：任意のサイズで成立。

$\boxed{83}$ (1) は $x^2(x+a+b+c)$.

(2) は $2(a+b+c)^3$.

(3) は $4abc$.

(4) は $4a^2b^2c^2$.

参考：(1) で $x=a+b+c$ とすると (2) になる。そのことに気づかずに、(2) を直接解いてももちろん OK。

背景：逆に、(2) を解いたときに、(1) の形に一般化できるのではないか、と着想するのは、数学研究に一歩進んだ高い立場。良い。

$\boxed{84}$ (1) は $(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)(a+b+c+d)$.

(2) は (1) の答えの -1 倍。2 行目と 3 行目の入れ替えだから。

(3) は $(x-y)^2(x+y+2a)(x+y-2a)$.

(4) は $(a-b+c-d)(a+b+c+d)(a^2+b^2-2ac+c^2-2bd+d^2)$. 複素数を使えばさらに因数分解できて、$(a-b+c-d)(a+ib-c-id)(a-ib-c+id)(a+b+c+d)$ とも書ける。

(5) は $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

(6) は $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$. 複素数 $\omega=(-1+\sqrt{3}i)/2$ を使えば、さらに、$(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)$ とも書ける。なお、ω の性質を雑多に並べておくと、$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0, \omega^{-1}+\omega=-1, \overline{\omega}=\omega^2=\omega^{-1}$.

(7) と (9) は (6) の答えの -1 倍。

(8) は (6) の答えの -2 倍。

(10) $(a-b+c-d+e-f)(a+b+c+d+e+f)(a^2-ab+b^2-ac-bc+c^2+2ad-bd-cd+d^2-ae+2be-ce-de+e^2-af-bf+2cf-df-ef+f^2)(a^2+ab+b^2-ac+bc+c^2-2ad-bd+cd+d^2-ae-2be-ce+de+e^2+af-bf-2cf-df+ef+f^2)$. これは大変すぎるが、$\zeta=(1+\sqrt{3}i)/2$ を用いれば、6 つの 1 次式の積に因数分解できる。$(a+b+c+d+e+f)(a-b+c-d+e-f)(a+\zeta b+\zeta^2 c+\zeta^3 d+\zeta^4 e+\zeta^5 f)(a+\zeta^5 b+\zeta^4 c+\zeta^3 d+\zeta^2 e+\zeta f)(a+\zeta^2 b+\zeta^4 c+d+\zeta^2 e+\zeta^4 f)(a+\zeta^4 b+\zeta^2 c+d+\zeta^4 e+\zeta^2 f)$.

背景 : (10) は一般の n に拡張できる。行列 $A=(a_{ij})$ は $a_{ij}=c_{j-i}$ と書けるとしよう。その時は $\zeta=\cos\frac{2pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ を使う。答えは、$\det A=\prod_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\zeta^{jk}c_j$.

$\boxed{85}$ (1) と (2) と (3) と (4) は 0.

(5) は x^4-1.

拡張 : (3) 一般の奇数サイズの時は問題$\boxed{91}$。(4) 一般の偶数サイズで 0. 奇数サイズは $\boxed{86}$(1)。(5) 一般のサイズで $x^n+(-1)^{n-1}$.

$\boxed{86}$ (1) は 2. 一般の奇数サイズでも同じく 2.

(2) は $a^4(a^4-1)^3$.

(3) は $1+a^4+a^8$.

(4) は $9a$.

チャレンジ : 一般化を試みよ。

$\boxed{87}$ $(ad-bc)^n$.

$\boxed{88}$ (1) の答えは 8. 一般のサイズなら 2^{n-1}.

(2) の答えは 1.

$\boxed{89}$ (1) a^2.

(2) $(ehj-dij-egk+cik+dgl-chl+efp-bip+alp-dfq+bhq-akq+cfr-bgr+ajr)^2$.

背景 : ここの中身に出てきた式

$$\mathrm{Pf}A := ehj-dij-egk+cik+dgl-chl+efp-bip+alp-dfq+bhq-akq+cfr-bgr+ajr$$

を交代行列 A の Pfaffian と言います。サイズが一般の偶数の時にも、交代行列の行列式は Pfaffian の 2 乗になります : $\det A=(\mathrm{Pf}A)^2$.

$\boxed{91}$ $A = -{}^tA$ の両辺の行列式を計算すると、$\det A = \det(-{}^tA) = (-1)^n \det({}^tA) = (-1)^n \det A$. したがって、$n$ が奇数の時は、$\det A = -\det A$ なので、$2\det A = 0$ なので $\det A = 0$. 証明終わり。

$\boxed{92}$ (1) $\mathbf{b}$ が零ベクトルの時は、両辺とも 1 となり、成り立つ。

$\mathbf{b} = \mathbf{e}_1$ という基本ベクトルの時は、行列 $E + \mathbf{bc}$ は上三角行列であり、その (1,1) 成分は $1 + c_1 = 1 + \mathbf{cb}$ であるから、成り立つことがわかる。

$\mathbf{b}$ が零ベクトルではない時は、$\mathbf{b} = P\mathbf{e}_1$ となるような正則行列 P が存在する。この時、

$$\begin{aligned}
\det(E + \mathbf{bc}) &= \det(E + P\mathbf{e}_1\mathbf{c}) \\
&= \det(PEP^{-1} + P\mathbf{e}_1\mathbf{c}) \\
&= \det(P(E + \mathbf{e}_1\mathbf{c}P)P^{-1}) \\
&= \det(P)\det(E + \mathbf{e}_1\mathbf{c}P)\det(P^{-1}) \\
&= \det(E + \mathbf{e}_1\mathbf{c}P) \\
&= 1 + (\mathbf{c}P)\mathbf{e}_1 \\
&= 1 + \mathbf{c}P\mathbf{e}_1 \\
&= 1 + \mathbf{cb}.
\end{aligned}$$

下から 3 つ目の等号で、$\mathbf{b} = \mathbf{e}_1$ の時には成立していることを用いた。

(2) $\mathbf{u}$ をすべての成分が 1 であるような n 次の列ベクトル、$\mathbf{v}$ をすべての成分が 1 であるような n 次の行ベクトルとする。この時、$K = \mathbf{uv}$ である。

まず、D が正則な対角行列の場合を考える。この時、

$$\begin{aligned}
\det(D + K) &= \det D \det(E + D^{-1}K) \\
&= \det D \det(E + D^{-1}\mathbf{uv}) \\
&= (\det D)(1 + \mathbf{v}D^{-1}\mathbf{u}) \\
&= \det D + \mathbf{v}\widetilde{D}\mathbf{u} \\
&= \det D + \mathrm{tr}\widetilde{D}.
\end{aligned}$$

したがって、D が一般の対角行列の時も $\det(D)(\det(D + K) - \det D - \mathrm{tr}\widetilde{D}) = 0$ が成り立つ。$\boxed{94}$ より、$(\det(D + K) - \det D - \mathrm{tr}\widetilde{D}) = 0$ が示せた。証明終わり。

$\boxed{90}$ 方針：問題$\boxed{92}$(2) が使える状況。一般のサイズにも拡張できる状況。

$\boxed{93}$ (1) 方針：行列式は単項式の和なので、多項式であることを用いる。

$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A} = \pm\widetilde{A}$. $\widetilde{A}$ の成分は A の成分の多項式なので、整数である。証明終わり。

(2) $E = AA^{-1}$ の両辺の行列式を考えると、$1 = \det E = \det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1}$. ここで、$\det A$ は A の成分に関する多項式であり、A の成分が整数だから $\det A$ も整数である。$\det A^{-1}$ は A^{-1} の成分に関する多項式であり、A^{-1} の成分が整数だから、$\det A^{-1}$ も

整数である。2 つの整数 p, q の積が $pq=1$ となるのは、$p=q=1$ あるいは $p=q=-1$ の時に限られる。$p=\det A, q=\det A^{-1}$ について適用すると、$\det A=\pm 1$ が示せた。証明終わり。

$\boxed{94}$ 色々な証明がある。一つ証明を与えておく。n に関する数学的帰納法で対偶「ある $x\in\mathbb{R}^n$ に対して、$f(x)\neq 0$」かつ「ある $x\in\mathbb{R}^n$ に対して、$g(x)\neq 0$」ならば、「ある $x\in\mathbb{R}^n$ に対して、$f(x)g(x)\neq 0$」を示す。

(i) $n=1$ の時。f の次数を d とすれば、$f(x)=0$ となる実数 x は、たかだか d 個しかない。f の次数を e とすれば、$g(x)=0$ となる実数 x は、たかだか e 個しかない。従って、それらの $d+e$ 個以外の実数 x に対して、$f(x)g(x)\neq 0.$

(ii) $n\geq 2$ とし、$n-1$ の時に証明できたとして、n の時を示す。f の x_n に関する次数を d とし、最高次の係数を f_0 とする。g の x_n に関する次数を e とし、最高次の係数を g_0 とする。帰納法の仮定より、ある $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$ に対して、$f_0(x')g_0(x')\neq 0.$ この x' を固定する。この時、$fg=f_0g_0x^{d+e}+\ldots$ となるので、$fg=0$ となる x_n はたかだか $d+e$ 個しかない。その $d+e$ 個以外の実数 x_n に対して、$fg\neq 0$ となる。証明終わり。

$\boxed{95}$ (1) 教科書通り。

(2) $f(A)=\det A,\ g(A)=\det(\widetilde{A})-\det(A)^{n-1}$ は $\boxed{94}$ の仮定を満たすことが (1) からわかる。したがって $\boxed{94}$ の結論が成立する。ところが $f(A)\neq 0$ となるような行列 A が存在する（例えば単位行列）ので、「すべての $A\in M(n,\mathbb{R})$ に対して $f(A)=0$」は成り立たないので、「すべての $A\in M(n,\mathbb{R})$ に対して $g(A)=0$」が成り立つ。証明終わり。

背景：ザリスキ稠密性。学年が進むとよく用いられる技法です。「大抵のところで成立する」と「連続性」の合わせ技。

$\boxed{96}$ (1) $r\leq n-2$ なので、A の最後の 2 行は零ベクトルである。したがって、A_{ij} の最後の 1 行は零ベクトルである。したがって、$\det A_{ij}=0$ である。証明終わり。

(2) A の最後の行は零ベクトルである。A_{ij} のどの行ベクトルも零ベクトルではないとすると、最後の行以外だけから A_{ij} は構成されているので $i=n$ である。同じ考察を列に関しても行う。A の最後の列は零ベクトルである。A_{ij} のどの列ベクトルも零ベクトルではないとすると、最後の列以外だけから A_{ij} は構成されているので $j=n$ である。すなわち、$i=j=n$ 以外の場合は、A_{ij} の最後の行あるいは列が零ベクトルなので $\det A_{ij}=0$ である。$i=j=n$ の場合は $A_{nn}=E_{n-1}$ なので $\det A_{nn}=\det E_{n-1}=1$ であり、$a^*_{nn}=1$ である。証明終わり。

$\boxed{123}$ (1) 方針：仮定より、$A=\begin{pmatrix}E_r & B\\ O & O\end{pmatrix}$ という形をしている。$Q=\begin{pmatrix}E_r & B\\ O & E_{n-r}\end{pmatrix}$ と定める。Q が正則行列であることと、$A=\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}Q$ と書けることを示せば良い。

(2) 方針：列の入れ替えをして、(1) に帰着する。A の主成分が存在する列の番号を $i_1<i_2<\cdots<i_r$ とする。それ以外の列の番号を $j_1<j_2<\cdots<j_{n-r}$ とする。置換 $\sigma\in S_n$

を $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r & r+1 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r & j_1 & \cdots & j_{n-r} \end{pmatrix}$ と定める。P_σ を σ に対応した置換行列とする。この時、AP_σ が (1) の形をしていることを示す。

(3) 方針:定理2.2.1(p26) の前半と、基本変形が基本行列で表せることから、基本行列 $P_1, \ldots, P_k$ が存在して、$P_k \cdots P_1 A$ は簡約な行列となる。$R := P_k \cdots P_1$ と定めると、基本行列が正則行列であることと、正則行列の積や逆行列も正則行列であることから、R も正則行列となる。RA について (2) を適用し、$P := R^{-1}$ とする。

$\boxed{124}$ (1) 方針：$r < s$ と仮定し、$P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_s & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$ ならば、Q は正則行列でないことを示す。$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{pmatrix}$ とブロック分けする。ただし、Q_1 は s 次正方行列である。この時、$Q_2 = O$ であることと Q_1 の第 s 列は零ベクトルであることを示す。すると、$\det(Q) = \det(Q_1)\det(Q_4)$ となり、$\det(Q_1) = 0$ なので Q は正則行列ではない。

(2) A の階数を s とする。$\boxed{124}$(3) より、$A = R \begin{pmatrix} E_s & O \\ O & O \end{pmatrix} S$ と書ける。この時、$R^{-1}P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_s & O \\ O & O \end{pmatrix} SQ^{-1}$ となる。従って、(1) より、$r = s$ となる。

$\boxed{97}$ (1) 「$\operatorname{rank} A = n$」と「$A$ は正則行列」と「$\det A \neq 0$」が同値であることを用いる。$\operatorname{rank} A = n$ なので $\det A \neq 0$. $\boxed{95}$(1) より $\det \widetilde{A} \neq 0$. したがって、$\operatorname{rank} \widetilde{A} = n$. 証明終わり。
あるいは、$A\widetilde{A} = (\det A)E$ より、$(\widetilde{A})^{-1} = \frac{1}{\det A} A$ なので、$\widetilde{A}$ も正則行列である。証明終わり。

(2) (3) $B = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ とする。$\operatorname{rank} A = r$ の時、$\boxed{123}$(2) より、$A = PBQ$ と書ける。ただし、P, Q は正則行列である。この時、$\boxed{98}$ より $\widetilde{A} = \widetilde{Q}\widetilde{B}\widetilde{P}$ である。$\boxed{97}$(1) より $\widetilde{Q}, \widetilde{P}$ は正則行列である。

(2) $r = n-1$ の時は $\boxed{96}$(2) より $\operatorname{rank} \widetilde{B} = \operatorname{rank} E_{nn} = 1$ である。したがって、$\operatorname{rank} \widetilde{A} = 1$ である。

(3) $r \leq n-2$ の時は $\boxed{96}$(1) より、$\widetilde{B} = O$ である。したがって、$\widetilde{A} = O$ である。

補足：他にも 4 章の内容を用いた証明などいろいろな証明がある。

補足：$\boxed{97}$(2)(3) は、$\det A = 0$ の場合の $\boxed{95}$(2) の精密化とも思える。

$\boxed{98}$ (1) A, B が正則行列の時。定理3.4.1 より、$\widetilde{A} = |A|A^{-1}$ である。従って $\widetilde{AB} = |AB|(AB)^{-1} = |A|\,|B|B^{-1}A^{-1} = \widetilde{B}\widetilde{A}$.

(2) $A,\ B$ が一般の時。$f(A, B) = |A|\,|B|$ とし、$g(A, B) = \widetilde{AB} - \widetilde{B}\widetilde{A}$ とする。f や g の各成分は $A,\ B$ の成分の多項式である。$f(E, E) = 1$ なので $f = 0$ ではない。また、(1) より、$f(A, B)g(A, B) = O$ である。従って、$\boxed{94}$ より、$g(A, B) = O$ となる。

$\boxed{99}$ $\widetilde{P_{ij}} = -P_{ij}$, $\widetilde{Q_i(c)} = c\,Q_i(\frac{1}{c})$, $\widetilde{R_{ij}(c)} = R_{ij}(-c)$.