練習問題6の解答例

version: July 14, 2020

お願い：解答に誤りを見つけたり、説明がわかりづらい点があれば、落合まで連絡してください。改訂します。

$\boxed{81}$ (1) と (2) は $(a-b)(b-c)(c-a)$.

(3) と (4) は $(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$.

(5) は $2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$.

(6) は $(a+b+c)^2(a-b)(b-c)(c-a)$.

コメント：多項式の次数や対称性の情報を使うと、結果の意味がわかりやすい。

転置行列の行列式が同じであることを使って良い。

元のファンデルモンド行列式 (例題 3.5.1, p60) を効果的に利用できると良い。

$\boxed{82}$ $x^6 + a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x + a_6 = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}x^i$.

背景：どんな多項式も、ある行列の固有多項式である。

背景：任意のサイズで成立。

$\boxed{83}$ (1) は $x^2(x+a+b+c)$.

(2) は $2(a+b+c)^3$.

(3) は $4abc$.

(4) は $4a^2b^2c^2$.

参考：(1) で $x = a+b+c$ とすると (2) になる。そのことに気づかずに、(2) を直接解いてももちろん OK。

背景：逆に、(2) を解いたときに、(1) の形に一般化できるのではないか、と着想するのは、数学研究に一歩進んだ高い立場。良い。

$\boxed{84}$ (1) は $(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)(a+b+c+d)$.

(2) はそれの -1 倍。2 行目と 3 行目の入れ替えだから。

(3) は $(x-y)^2(x+y+2a)(x+y-2a)$.

(4) は $(a-b+c-d)(a+b+c+d)(a^2+b^2-2ac+c^2-2bd+d^2)$. 複素数を使えばさらに因数分解できて、$(a-b+c-d)(a+ib-c-id)(a-ib-c+id)(a+b+c+d)$ とも書ける。

(5) は $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

(6) と (9) は $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$. 複素数 $\omega=(-1+\sqrt{3}i)/2$ を使えば、さらに、$(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)$ とも書ける。なお、ω の性質を雑多に並べておくと、$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0, \omega^{-1}+\omega=-1, \overline{\omega}=\omega^2=\omega^{-1}$.

(7) は (6) の答えの -1 倍。

(8) は (6) の答えの -2 倍。

(10) $(a-b+c-d+e-f)(a+b+c+d+e+f)(a^2-ab+b^2-ac-bc+c^2+2ad-bd-cd+d^2-ae+2be-ce-de+e^2-af-bf+2cf-df-ef+f^2)(a^2+ab+b^2-ac+bc+c^2-2ad-bd+cd+d^2-ae-2be-ce+de+e^2+af-bf-2cf-df+ef+f^2)$. これは大変すぎるが、$\zeta=(1+\sqrt{3}i)/2$ を用いれば、6 つの 1 次式の積に因数分解できる。$(a+b+c+d+e+f)(a-b+c-d+e-f)(a+\zeta b+\zeta^2 c+\zeta^3 d+\zeta^4 e+\zeta^5 f)(a+\zeta^5 b+\zeta^4 c+\zeta^3 d+\zeta^2 e+\zeta f)(a+\zeta^2 b+\zeta^4 c+d+\zeta^2 e+\zeta^4 f)(a+\zeta^4 b+\zeta^2 c+d+\zeta^4 e+\zeta^2 f)$.

背景 : (10) は一般の n に拡張できる。行列 $A=(a_{ij})$ は $a_{ij}=c_{j-i}$ と書けるとしよう。その時は $\zeta=\cos\frac{2pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ を使う。答えは、$\det A=\prod_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\zeta^{jk}c_j$.

$\boxed{85}$ (1) と (2) と (3) と (4) は 0.

(5) は x^4-1.

拡張 : (3) 一般の奇数サイズの時は問題 $\boxed{91}$。(4) 一般の偶数サイズで 0. 奇数サイズは $\boxed{86}$(1)。(5) 一般のサイズで $x^n+(-1)^{n-1}$.

$\boxed{86}$ (1) は 2. 一般の奇数サイズでも同じく 2.

(2) は $a^4(a^4-1)^3$.

(3) は $1+a^4+a^8$.

(4) は $9a$.

チャレンジ : 一般化を試みよ。

$\boxed{87}$ $(ad-bc)^n$.

$\boxed{88}$ 答えは 8. 一般のサイズなら 2^{n-1}.

$\boxed{89}$ $(ehj-dij-egk+cik+dgl-chl+efp-bip+alp-dfq+bhq-akq+cfr-bgr+ajr)^2$.

背景 : ここの中身に出てきた式 $ehj-dij-egk+cik+dgl-chl+efp-bip+alp-dfq+bhq-akq+cfr-bgr+ajr$ を交代行列 A の Pfaffian と言います。サイズが一般の偶数でも行列式は Pfaffian の 2 乗になります。

$\boxed{91}$ $A=-{}^tA$ の両辺の行列式を計算すると、$\det A=\det(-{}^tA)=(-1)^n\det({}^tA)=(-1)^n\det A$. したがって、$n$ が奇数の時は、$\det A=-\det A$ なので、$2\det A=0$ なので $\det A=0$. 証明終わり。

$\boxed{92}$

$\boxed{90}$ 方針：問題$\boxed{92}$(2) が使える状況。一般のサイズにも拡張できる状況。

$\boxed{93}$ (1) レポート問題なので後で答えをリリースします。

(2) $E = AA^{-1}$ の両辺の行列式を考えると、$1 = \det E = \det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1}$. ここで、$\det A$ は A の成分に関する多項式であり、A の成分が整数だから $\det A$ も整数である。$\det A^{-1}$ は A^{-1} の成分に関する多項式であり、A^{-1} の成分が整数だから、$\det A^{-1}$ も整数である。2 つの整数 p, q の積が $pq = 1$ となるのは、$p = q = 1$ あるいは $p = q = -1$ の時に限られる。$p = \det A, q = \det A^{-1}$ について適用すると、$\det A = \pm 1$ が示せた。証明終わり。

$\boxed{94}$

$\boxed{95}$ (1) 教科書通り。

(2) $f(A) = \det A$, $g(A) = \det(\widetilde{A}) - \det(A)^{n-1}$ は$\boxed{94}$ の仮定を満たすことが (1) からわかる。したがって $\boxed{94}$ の結論が成立する。ところが $f(A) \neq 0$ となるような行列 A が存在する（例えば単位行列）ので、「すべての $A \in M(n, \mathbb{R})$ に対して $f(A) = 0$」は成り立たないので、「すべての $A \in M(n, \mathbb{R})$ に対して $g(A) = 0$」が成り立たつ。証明終わり。

背景：ザリスキ稠密性。学年が進むとよく用いられる技法です。「大抵のところで成立する」と「連続性」の合わせ技。

$\boxed{96}$ (1) $r \leq n - 2$ なので、A の最後の 2 行は零ベクトルである。したがって、A_{ij} の最後の 1 行は零ベクトルである。したがって、$\det A_{ij} = 0$ である。証明終わり。

(2) A の最後の行は零ベクトルである。A_{ij} のどの行ベクトルも零ベクトルではないとすると、最後の行以外だけから A_{ij} は構成されているので $i = n$ である。同じ考察を列に関しても行う。A の最後の列は零ベクトルである。A_{ij} のどの列ベクトルも零ベクトルではないとすると、最後の列以外だけから A_{ij} は構成されているので $j = n$ である。すなわち、$i = j = n$ 以外の場合は、A_{ij} の最後の行あるいは列が零ベクトルなので $\det A_{ij} = 0$ である。$i = j = n$ の場合は $A_{nn} = E_{n-1}$ なので $\det A_{nn} = \det E_{n-1} = 1$ であり、$a^*_{nn} = 1$ である。証明終わり。

$\boxed{123}$

$\boxed{97}$ 方針：(2)(3) は $\boxed{96}$, $\boxed{123}$ と演習問題 (線形代数第 5 回) の$\boxed{2}$ を用いて証明できる。他にも 4 章の内容を用いた証明などいろいろな証明がある。

(1) は$\boxed{95}$(1) を用いても良い。しかし、(2)(3) は$\boxed{95}$からは証明できない。