行列の練習問題7

version: August 3, 2020

課題の目標：行列いろいろ。

問題番号や順序を変更したり、ヒントを付け加えたり、小問の構成を追加したり、記号を変更したりなどの手直しの可能性があります。ですから、気がついたことを連絡してくれることを歓迎します。

$\boxed{30}$ 次の行列 A に対して、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, (3) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, (4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, (5) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$,

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, (8) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -4 \\ 3 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(9) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 10 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, (10) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, (11) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

(12) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -7 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 8 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, (13) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$, (14) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

(15) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, (16) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 4 & -7 & 10 \end{pmatrix}$, (17) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, (18) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$,

(19) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, (20) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

(21) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. (22) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. (23) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, (24) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

(25) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, (26) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (27) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -5 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

出典：問題 4.2(p74) 1(1)-(6), (7). 例題 4.3.1(p76) と例題 4.3.2(p79). 問題 4.3(p80) 1(1)-(4), 例題 4.4.1(p83), 例 6(p84), 問題 4.4(p86) 1(1)-(6), 2. 4(1)-(2), 問題 5.1(p91) 3(1)-(3)。

固有空間の計算問題。出典：例題 5.3.2(p103), 問題 5.3(p105) 2(1)-(4)

$\boxed{31}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ とする。

(1) 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ を解け。

(2) 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = 2\mathbf{x}$ を解け。

(4) 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = 4\mathbf{x}$ を解け。

(3) 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = 3\mathbf{x}$ を解け。

$\boxed{32}$ $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ とする。

(1) 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ を解け。

(3) 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = 3\mathbf{x}$ を解け。

(2) 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = 2\mathbf{x}$ を解け。

$\boxed{33}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

(1) 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ を解け。

(2) 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = i\mathbf{x}$ を解け。

(3) 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = -i\mathbf{x}$ を解け。

$\boxed{34}$ $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 2 & 0 & 6 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ とする。

(1) 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = -\mathbf{x}$ を解け。

(2) 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = 2\mathbf{x}$ を解け。

(3) 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = 3\mathbf{x}$ を解け。

$\boxed{35}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(1) 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ を解け。

(2) 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = 2\mathbf{x}$ を解け。

(3) 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = 3\mathbf{x}$ を解け。

特に、解が $\mathbf{0}$ だけからなるかどうかを気にしてください。$\boxed{30}$-$\boxed{35}$.

実数行列と複素数行列の微妙な違い。

$\boxed{125}$ A を 2 次の正方行列で A^2 が上三角行列であり、A^2 は対角行列でないとする。この時、A が上三角行列であることを示せ。

$\boxed{127}$ 複素数を成分とする行列 A で $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となるものを一つ求めよ。あるいは、全部求めよ。

$\boxed{126}$ 実数を成分とする行列 A で $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となるものは存在しないことを示せ。

$\boxed{134}$ $=\boxed{126'}$

(2) 何か適当な演習問題があったら、そこから直ちに派生する問題を作れ。(作った問題が解けるかどうかは気にしないで良い。)

(4) 発展問題：複素数を成分とする 2 次の正則行列 X に対して、$A^2 = X$ を満たすような行列 A は存在するか？すなわち、

$$\{A^2 \mid A \text{ は複素正則行列 }\} = \{X \mid \text{複素正則行列 }\}$$

となるか？

(3) 発展問題：2 次の実正則行列が実行列の 2 乗として表せる条件を求めよ。すなわち、

$$\{A^2 \mid A \text{ は実正則行列}\} = \{X \mid X \text{ は実正則行列で、} \det X > 0 \text{ で、条件@@@を満たす}\}$$

のように表す時の条件「@@@」を $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ の成分を用いて具体的に表せ。

(5) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ x & 0 \end{pmatrix}$ とすると $A^2 = xE$ となることを示せ。

(6) $A^2 = B$ の時に、A と B は可換であることを示せ。

- 以下の (7)(8) では、B は 2 次の正方行列であり、スカラー行列ではないとする。

(7) B と可換な行列 A は、スカラー u, v を用いて $A = uB + vE$ と書けることを示せ。

(8) u, v をスカラーとし、$(uB + vE)^2 = B$ であるとする。この時、

$$u^2 \mathrm{tr}(B) + 2uv - 1 = 0, \qquad v^2 - u^2 \det(B) = 0$$

であることを示せ。

(9) 逆に u, v が (8) の 2 つの等式を満たすとき、$(uB + vE)^2 = B$ が成り立つことを示せ。

(10) $\det(B) = \mathrm{tr}(B) = 0$ でなければ、上の (8) の 2 つの等式を満たすような複素数の組 (u, v) が存在することを示せ。

(11) $\det(B) = \mathrm{tr}(B) = 0$ ならば、上の (8) の 2 つの等式を満たすような複素数は存在しないことを示せ。

(12) B が 2 次の正方行列であり、$\det(B) = \mathrm{tr}(B) = 0$ であるとする。この時、B がスカラー行列であることと $B = O$ であることは同値であることを示せ。

(13) =(4) の拡張：複素数を成分とする 2 次の正方行列が行列の 2 乗として表せる条件を求めよ。

(14) 上の (8) の 2 つの等式を満たすような実数の組 (u, v) が存在するための必要十分条件を求めよ。

(15) =(3) の拡張：実数を成分とする 2 次の正方行列が実行列の 2 乗として表せる条件を求めよ。

交代行列の性質：問題 3.4(p59) の問 7 の詳細版。

$\boxed{128}$ A が偶数次の交代行列であるとする。この時、余因子行列 $\widetilde{A}$ は交代行列であることを示せ。

$\boxed{129}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c & d \\ -a & 0 & e & f & g \\ -b & -e & 0 & h & i \\ -c & -f & -h & 0 & j \\ -d & -g & -i & -j & 0 \end{pmatrix}$ とする。

(1) 余因子行列 $\widetilde{A}, \widetilde{B}$ を求めよ。

(2) 余因子行列は交代行列か、対称行列か、どちらでもないか？

$\boxed{130}$ (1) ${}^t(A_{ij}) = ({}^tA)_{ji}$ となることを示せ。

(2) $\widetilde{A}$ の (j,i) 成分は、$\widetilde{{}^tA}$ の (i,j) 成分と一致することを示せ。すなわち ${}^t(\widetilde{A}) = \widetilde{{}^tA}$ である。

(3) A が対称行列の時、$\widetilde{A}$ も対称行列であることを示せ。

(4') A を n 次正方行列とする。スカラー c に対して、$\widetilde{cA} = c^{n-1}\widetilde{A}$ を示せ。

(4) A を n 次正方行列とする。$\widetilde{-A} = (-1)^{n-1}\widetilde{A}$ であることを示せ。

(5) A を偶数次交代行列とする。$\widetilde{A}$ は交代行列であることを示せ。

(6) A を奇数次交代行列とする。$\widetilde{A}$ は対称行列であることを示せ。

ブロック対角化。

$\boxed{131}$ X を $m \times n$ 次行列とする。A を n 次正方行列とする。N を m 次正方行列である自然数 k に対して $N^k = O$ とする。

(1) $X - NXA = O$ ならば $X = O$ を示せ。

(3) $X - NXA = Y$ ならば $X = \sum_{i=0}^{k-1} N^i Y A^i$ であることを示せ。

(2) $X = \sum_{i=0}^{k-1} N^i Y A^i$ ならば $X - NXA = Y$ となることを示せ。

$\boxed{132}$ N を m 次の冪零行列、D を n 次の正則行列とする。

(1) $m \times n$ 行列 C に対して、$NX + C = XD$ を満たす $m \times n$ 行列 X が存在することを示せ。

(2) $\begin{pmatrix} N & C \\ O & D \end{pmatrix} P = P \begin{pmatrix} N & O \\ O & D \end{pmatrix}$ を満たす正則行列 P が存在することを示せ。

数学演習第 5 回 $\boxed{2}$ の別証明のための流れ。

$\boxed{133}$ A を $n \times (n+1)$ 行列とし、B を $(n+1) \times n$ 行列とする。$i = 1, 2, \ldots, n+1$ に対して、ここだけの記号で、$A[i]$ を A から第 i 列を取り除いた行列、$B[i]$ を B から第 i 行を取り除いた行列とする。この時、

$$\det(AB) = \sum_{i=1}^{n+1} \det(A[i]) \det(B[i]) \tag{*}$$

を示したい。

(1) $A = \begin{pmatrix} E & \mathbf{b} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} E \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}$ とする。この時、上の式 (*) が成り立つことを示せ。

(2) P, Q を n 次正則行列とする。$(PA)[i] = P(A[i])$, $(BQ)[i] = (B[i])Q$ を示せ。

(3) $A[n+1], B[n+1]$ が正則行列の時、式 (*) が成り立つことを示せ。

(4) 一般の A, B に対して、式 (*) が成り立つことを示せ。

(5) 式 (*) を用いて、数学演習第 5 回 $\boxed{2}$ を証明せよ。