練習問題7の解答例

version: August 3, 2020

お願い：解答に誤りを見つけたり、説明がわかりづらい点があれば、落合まで連絡してください。改訂します。

$\boxed{30}$ (1)(4)(6)(7)(21)(22)(23) の解は $\mathbf{x} = \mathbf{0}$。

(1)(4)(6)(7)(21) は正方行列なので行列式を計算して $\det(A) \neq 0$ をチェックしても良い。

(22)(23) で、行列式を用いる議論はビデオを見てください。(結果は変わらないです、もちろん。)

A を簡約化した行列をこのプリントでは仮の記号で C と書きます。

(8) を簡約化した行列 C は教科書 p76 に書かれている。

(9)-(12) は教科書の解答から解を読み取ることが慣れればできる。

(13) の解答は教科書に書いてある。

(15)-(18) は、教科書の解答の 1 次結合が解である。

(19)-(20) は、教科書の解答から解を読み取ることが慣れればできる。

(24) を簡約化した行列は教科書の解答 (p90) の B に書いてある。解は「Ker$T$ の基」に書かれているベクトルの 1 次結合である。

(25)-(27) は教科書の解答の「Ker$T$ の基」に書かれているベクトルの 1 次結合が解である。

(2) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = c_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$

(3) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = c_4 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -2 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$

(5) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$ (8) $\mathbf{x} = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_5 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$

(9) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = c_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_5 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(10) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = c_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_5 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(11) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = c_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(12) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = c_3 \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_5 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(14) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = c_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(19) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(20) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(24) $\mathbf{x} = c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_5 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(25) $C=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{x}=c_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_4\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$.

(26) $C=\begin{pmatrix}1&0&3&2&0\\0&1&1&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{x}=c_3\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}c_4\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$.

(27) $C=\begin{pmatrix}1&0&3&-1&-2\\0&1&1&1&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{x}=c_3\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_4\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c_5\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.

$\boxed{31}$ (3) の答えは $\mathbf{x}=\mathbf{0}$. (4)(2) の答えは教科書 (p104) に書いてある。(1) の答えも同じルールで読み取ることができて、$\mathbf{x}=c\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

$\boxed{32}$ (1) $\mathbf{x}=c_2\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, (3) $\mathbf{x}=c\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$. (2) の答えは $\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

$\boxed{33}$ (1) $\mathbf{x}=c\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. (2) $\mathbf{x}=c\begin{pmatrix}i\\0\\1\end{pmatrix}$. (3) $\mathbf{x}=c\begin{pmatrix}-i\\0\\1\end{pmatrix}$.

$\boxed{34}$ (1) $\mathbf{x}=c\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$, (2) $\mathbf{x}=c\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, (3) $\mathbf{x}=c\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$.

$\boxed{35}$ (1) $\mathbf{x}=c\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, (2) $\mathbf{x}=c\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, (3) の答えは $\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

$\boxed{125}$ から $\boxed{127}$ は水 3 のレポート問題とその誘導に関係する問題です。

$\boxed{126}$ は $\boxed{125}$ を用いてもいいし、用いずに直接解いても良い。

$\boxed{126}$ は $\boxed{127}$ を解いてから、「どの答えも、実数の行列ではない」という方針で解いても良い。実はスッキリした解答が書ける。

$\boxed{126}$ は$\boxed{125}$, $\boxed{127}$ を経由せずに直接解くことも可能である。（実際に、簡単でもある。）

$\boxed{134}$ 関連事項：

(3) (4) のヒントは (5) から (15) に与えられている。

(4) の答えは yes。

(5) 結果の意味：スカラー行列は数の範囲を拡張せずに 2 乗で書き表わすことができる。

(6) $AB = AA^2 = A^2A = BA.$

(7) Ex1 でやったっけ？

(8) Ex1 で示した、ケーリーハミルトン $B^2 = \mathrm{tr}(B)B - \det(B)E$ を用いると、

$$\begin{aligned}(uB + vE)^2 - B &= u^2B^2 + 2uvB + v^2E - B \\ &= u^2(\mathrm{tr}(B)B - \det(B)E) + 2uvB + v^2E - B \\ &= (u^2\mathrm{tr}(B) + 2uv - 1)B + (v^2 - u^2\det(B))E\end{aligned} \tag{式 8}$$

である。（B と E の 1 次結合の形に整理したことがポイント。）従って、$(uB+vE)^2 = B$ ならば、

$$(u^2\mathrm{tr}(B) + 2uv - 1)B + (v^2 - u^2\det(B))E = O$$

となる。B はスカラー行列ではないから、B の係数

$$u^2\mathrm{tr}(B) + 2uv - 1 = 0 \tag{*1}$$

であり、従って、

$$v^2 - u^2\det(B) = 0 \tag{*2}$$

も得られる。

(9) 逆に、(式 8) の最右辺が O となるから、最左辺 $= O$ となる。

(10) (11)(14) 共通の考察：式 (*1) より、$u \neq 0$ であり、

$$v = \frac{1 - u^2\mathrm{tr}(B)}{2u} \tag{式 v}$$

となる。式 (*2) に代入して、

$$\frac{(1 - u^2\mathrm{tr}(B))^2}{4u^2} - u^2\det(B) = 0$$

となる。分母を払うと、

$$(1 - u^2\mathrm{tr}(B))^2 - 4u^4\det(B) = 0$$

つまり、

$$1 - 2\mathrm{tr}(B)u^2 + (\mathrm{tr}(B)^2 - 4\det(B))u^4 = 0. \tag{式 u}$$

(11) この時、(式 u) は $1 = 0$ となるので、それを満たす u は存在しない。

(10) この時、(式 u) の u^2 の係数か u^4 の係数か少なくとも一方は 0 でないので、(式 u) は 2 次方程式か 4 次方程式である。従って、必ず (式 u) を満たす複素数が存在する。その u に対して、(式 v) で v を決めれば、求めた u, v が答えである。

別解：方程式 (式 u) を具体的に解く。$x = 1/u$ とすると、

$$x^4 - 2\mathrm{tr}(B)x^2 + (\mathrm{tr}(B)^2 - 4\det(B)) = 0.$$

従って、

$$x^2 = \mathrm{tr}(B) \pm 2\sqrt{\det(B)}$$

となる。$\pm$ の解がどちらも 0 になることはないので、少なくとも一つは複素数解 $x \neq 0$ が存在する。その時、$u = 1/x$ とし、その u に対して、(式 v) で v を決めれば、求めた u, v が答えである。

(12) $B = O$ ならば B はスカラー行列である。B がスカラー行列で、$\mathrm{tr}(B) = 0$ ならば、$B = O$ である。

(13) 書けないための必要十分条件は、(5)(10)(11) より、「B はスカラー行列ではなくて $\det B = \mathrm{tr}(B) = 0$」である。(12) より、「$B \neq O$ かつ $\det B = \mathrm{tr}(B) = 0$」である。さらに書き換えて、「$B^2 = O$ かつ $B \neq O$」でもある。

(14) まず、$\det(B) \geq 0$ が必要である。さらに、$\mathrm{tr}(B) + 2\sqrt{\det(B)} > 0$ が必要である。逆にその時、解 $x > 0$ が存在し、$u = 1/x$ とし、その u に対して、(式 v) で v を決めれば、求めた u, v が答えである。故に条件は、

$$\det(B) \geq 0 \text{ かつ } \mathrm{tr}(B) + 2\sqrt{\det(B)} > 0.$$

(15) 実スカラー行列 $B = bE$ に対しては、$\mathrm{tr}(B) + 2\sqrt{\det(B)} = 2b + 2|b|$ となるので、$b > 0$ の時は $4b > 0$, $b \leq 0$ の時は 0 となることがわかる。従って、条件は、

「$\det(B) \geq 0$ かつ $\mathrm{tr}(B) + 2\sqrt{\det(B)} > 0$」または、「$B$ はスカラー行列」。

平方根を取り去って書くと、「$\mathrm{tr}(B) \geq 0$ かつ $\det(B) \geq 0$」または、「$\mathrm{tr}(B) < 0$ かつ $4\det(B) > (\mathrm{tr}\ B)^2$」または、「$B$ はスカラー行列」。B の成分 x, y, z, w でこれらの条件を書き直すと、「$x + w \geq 0$ かつ $xw \geq yz$ 」または「$x + w < 0$ かつ $-yz > (x - w)^2$」または「$x - w = y = z = 0$」

$\boxed{128}$ ヒント： A が正則ならば $\widetilde{A} = (\det A)A^{-1}$. 従って、${}^t\widetilde{A} = (\det A){}^t(A^{-1}) = (\det A)({}^tA)^{-1} = (\det A)(-A)^{-1} = -(\det A)A^{-1} = -\widetilde{A}$.

$\boxed{129}$ $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$。特に $\widetilde{A}$ は対称行列である。

なお、$A \neq O$ ならば $\mathrm{rank}\widetilde{A} = 1$ となっている。

$\boxed{130}$ (6) 参考：$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} Pf(A_{11}) & Pf(A_{22}) & \cdots & Pf(A_{nn}) \end{pmatrix}$ と行ベクトルを定めると、$\widetilde{A} = {}^t\mathbf{u}\mathbf{u}$ と書くことができて、$A \neq O$ の時は余因子行列 $\widetilde{A}$ は階数が 1 の対称行列であることが確認できる。

$\boxed{131}$ 解答：方針

(1) $X = NXA$ を用いて、自然数 i に対して、$X = N^iXA^i$ が成り立つことを示す。これを用いて、さらに $N^k = O$ であれば $X = O$ であることを示す。

(3) $X - NXA = Y$ を用いて、0 以上の整数 i に対して、$N^iXA^i - N^{i+1}XA^{i+1} = N^iYA^i$ を示す。この式を足し合わせることで、自然数 j に対して、$X - N^jXA^j = \displaystyle\sum_{i=0}^{j-1} N^iYA^i$ を示す。さらに $N^k = O$ であれば $X = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} N^iYA^i$ となる。

(2) X の表示より

$$\begin{aligned} X - NXA &= \sum_{i=0}^{k-1} N^iYA^i - \sum_{i=0}^{k-1} N^{i+1}YA^{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} N^iYA^i - \sum_{i=1}^{k} N^iYA^i \\ &= Y - N^kYA^k \end{aligned}$$

である。これを用いて、さらに $N^k = O$ であれば、$X - NXA = Y$ を得る。

出典：二木「線型代数学」培風館の補題 6.1.5(p176) の証明、内田ら「線形代数入門」裳華房の定理 7.4.1(p165) の証明。

解釈：$M(m,n)$ から $M(m,n)$ への写像 $X \mapsto X - NXA$ で見ると、(2) より全射であることがわかり、(3) より単射であることがわかる。

$\boxed{132}$ (1) ヒント：$A = D^{-1}, Y = CD^{-1}$ とし、$X - NXA = Y$ を解く。$\boxed{131}$ を用いる。

(2) ヒント $P = \begin{pmatrix} E & X \\ O & E \end{pmatrix}$ の形で探す。(1) を用いる。

$\boxed{133}$ (1) 左辺：$AB = E + \mathbf{bc}$ である。問題 $\boxed{92}$(1) を用いることができて、
$\det(AB) = \det(E + \mathbf{bc}) = 1 + \mathbf{cb}$ となる。
右辺：$A[n+1] = E, B[n+1] = E$ であるので $\det(A[n+1]) = 1, \det(B[n+1]) = 1.$
次に、$i = 1, 2, \ldots, n$ に対しては、$\det(A[i]) = (-1)^{n-i}b_i,\ \det(B[i]) = (-1)^{n-i}c_i.$ これらより、(*) の右辺は

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \det(A[i])\det(B[i]) &= \det(A[n+1])\det(B[n+1]) + \sum_{i=1}^{n} \det(A[i])\det(B[i]) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n} b_ic_i. \end{aligned}$$

これは左辺と一致している。

(3) ヒント：$A[n+1]$ が正則な時、A の第 $(n+1)$ 列を $\mathbf{a}$ とすると、$A = \begin{pmatrix} A[n+1] & \mathbf{a} \end{pmatrix} = A[n+1] \begin{pmatrix} E & \mathbf{b} \end{pmatrix}$, ただし、$A[n+1]\mathbf{b} = \mathbf{a}$ となる。(1) と (2) をうまく使える状況になっていることを確かめる。

(4) 方針：$\boxed{94}$ の活用を考える。

背景：Laplace 展開。