微分積分学B　　演習問題

$\boxed{1}$ （**1変数ベクトル値関数の微分，内積と外積**）曲線 $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ について次を示せ．

(1) $\ddot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t) \equiv 0$ であるとき，$\|\dot{\gamma}(t)\|$ は t に依らず一定である．

(2) $\ddot{\gamma}(t) \times \gamma(t) \equiv 0$ であるとき，$\dot{\gamma}(t) \times \gamma(t)$ は t に依らず一定のベクトルである．

コメント:第2章は比較的簡単に扱ったが，古典力学などでは重要．教科書をよく読んで節末の問題をやっておくこと．

$\boxed{2}$ （**多変数の関数**）関数 $f(x,y) = x^2 - x^4 - y^2$ について以下の問に答えよ．

(1) 極値点を求め，極大，極小を判定せよ．

(2) 最大点と最小点を求めよ．

(3) $z = f(x,y)$ のグラフの点 $(x,y,z) = (1,1,-1)$ での接平面を求めよ．

(4) 等位線をいくつかの値について描け．

コメント:多変数関数についての基本的な問題．こういった問題は自分で関数をうまく設定して問題を作成できるぐらいになって欲しい．

$\boxed{3}$ （**偏微分の順序交換**）原点 $(0,0)$ の近傍で定義された C^1 級関数 $f(x,y)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f_{xy}(x,y)$ が原点の近傍 U で存在して連続であるならば，U 上で $f_{yx}(x,y)$ も存在して，

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

が成り立つことを示せ．(定理の証明を思い出す.)

(2) 次の関数は C^1 級であるが，$f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ であることを確かめよ．

$$f(x,y) = \begin{cases} xy(x^2-y^2)/(x^2+y^2), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

コメント:これは偏微分の順序交換について定理に関する問題．(1) は定理の条件は少し緩められることを示している．(2) で定理の仮定のどの部分が成り立っていないかを確かめよ．

$\boxed{4}$ （**合成微分律**）変数 z, x, y, r, θ が関係

$$z = f(x,y), \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

という関係を満たしているとする．ただし f は C^1 級の関数である．

(1) $\partial z/\partial\theta$, $\partial z/\partial r$ を f_x, f_y を用いて表せ．

(2) $\partial^2 z/\partial\theta^2$, $\partial^2 z/\partial r\partial\theta$, $\partial^2 z/\partial r^2$ を f やその微分を用いて表せ.

(3) z が r のみの関数として $z = g(r)$ と表せるためには

$$yf_x(x,y) - xf_y(x,y)$$

がすべての点 (x, y) で成り立つことが必要十分であることを示せ.

コメント:(1) や (2) の計算が正確に行えることは今後絶対に必要になる. 後で苦労するよりもここでしっかり身に付けて欲しい. これも例題を自分で作成できるぐらいになって欲しい.

$\boxed{5}$ (**最大点・最小点**) 3 辺の長さが a, b, c の三角形の面積 S は

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = (a+b+c)/2$$

で与えられる. (Heron の公式) このことを用いて, 周の長さが一定の三角形のうち面積が最大になるものは正三角形であることを示せ.

コメント:これも基本的には易しい問題だが,「どれを変数と見るか」,「変数はどの範囲で動くか」についてある程度自分で考える必要があるので難しく感じる人も多いと思う.

$\boxed{6}$ (**最大点・最小点**)n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ に m 個の点 P_i, $1 \le i \le m$, が与えられているとする. このとき

$$\sum_{i=1}^{n} \|P - P_i\|^2$$

が最小になる点 P を求めよ.

$\boxed{7}$ (**未定乗数法**) 2 次対称行列 A を用いて関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot A \cdot {}^t\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = (x, y)$$

で定義する. 条件 $x^2 + y^2 = 1$ の条件のもとで $f(x, y, z)$ の最大値（最小値）は A の最大（最小）の固有値と一致することを示せ. また, 3 次元でも同様のことが成り立つことを示せ.