2021/6/23 配布

数学演習 IA—10 回目 (行列式の 2 回目)

- 次の [1][2][3] に答えよ。[∞] はしてもしなくても良い。
- なお、[3](2)(3) が難しい場合には下記の (4) に取り組んでも良い。

[**1**] A をサイズが n の正則行列とし、その余因子行列を $\tilde{A}$ と書く。$\det(\tilde{A}) = (\det A)^{n-1}$ を示せ。

[**2**] ブロック分けされた行列 $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ を考える。

(1) A が単位行列の時 $\det X = \det(D - CB)$ を示せ。

(2) A が正則行列の時 $\det X = \det(D - CA^{-1}B)\det A$ を示せ。

(3) D のサイズが 1 の時 $\det X = D\det A - C\tilde{A}B$ を示せ。ただし $\tilde{A}$ は A の余因子行列。

[**3**] $E_n(r) = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ を階数 r、サイズ n の正方行列とする。(定理 2.5, p40 の記号。)

(1) $E_n(r)$ の余因子行列を求めよ。

(2) n 次正方行列 A の階数が $n-1$ の時、A の余因子行列の階数を求めよ。

(3) n 次正方行列 A の階数が $n-2$ 以下の時、A の余因子行列は零行列であることを示せ。

[∞] 正方行列 Ω の (i,j) 成分が $e^{2\pi\sqrt{-1}(i-1)(j-1)/n}$ であるとする。

(1) Ω^2 を求めよ。

(2) $\det \Omega^2$ を n を用いて表せ。

(3) $\det \Omega$ を求めよ。

答案作成上のコメント：

- [3](1) r に関して場合分けして結果を書いてください。
- [3](2)(3) は難しいと思ったら次の問題「(4) $E_n(r)$ の余因子行列の階数を求めよ」 だけでいいです。
- [∞] は答えないで良いです。特に (3) は難しいかもしれません。
- [∞] の成分がわかりづらいかもしれないので別の書き方で書いておくと、

$$\omega_{ij} = \cos\frac{2(i-1)(j-1)\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2(i-1)(j-1)\pi}{n}.$$

出典：[1] 練習問題 3.12(p97), [2] 練習問題 3.11(p88), [3](3) 定理 3.19(p93), [4] の Ω は例 3.25(p96)。