[1] Th3.14' $A\tilde{A} = (\det A)E$

の両辺の行列式を考えると

$$\det(A\tilde{A}) = \det((\det A)E)$$

定理3.9 $\|$ $\quad\quad$ $\|$ 定理3.6

$(\det A)(\det \tilde{A}) \quad\quad (\det A)^n \det E$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \|$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad (\det A)^n$

定理3.15 より $\det A \neq 0$ なので

$$\det \tilde{A} = (\det A)^{n-1}$$ // [1]

A が正則でない場合の証明

(ビデオとは異なる方法)

$\det A = 0$ のときを考える。

Thm 3.14' より $A\tilde{A} = (\det A)E = O$

もし $\tilde{A}$ が正則だとしたら

$O = A\tilde{A}\tilde{A}^{-1} = A$ となる。

このとき $\tilde{A} = O$ なので矛盾

従って $\tilde{A}$ は正則でない

$\therefore \det \tilde{A} = 0$ //

[2] (1)

$$X=\begin{pmatrix} E & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$X\begin{pmatrix} E & -B \\ O & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & O \\ C & -CB+D \end{pmatrix}$$

$$\therefore \det X\begin{pmatrix} E & -B \\ O & E \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} E & O \\ C & D-CB \end{pmatrix}$$

|| 定理3.9 　　　　　　|| 定理3.11

$$\det X \det\begin{pmatrix} E & -B \\ O & E \end{pmatrix} \qquad \det(E-CB)$$

|| 定理3.11

$$\det X$$

(2)

$$X=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$X\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & B \\ CA^{-1} & D \end{pmatrix} \quad (1)$$

積公式

$$\det X \underbrace{\det\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & E \end{pmatrix}}_{=(\det A)^{-1}}=\det(D-CA^{-1}B)$$

$$\therefore \det X=\det(D-CA^{-1}B)\det A$$

(3) (2)より

$\det X = (d - CA^{-1}B)\det A$,

(定理3.14の $A^{-1}\det A = \tilde{A}$)

$= d \cdot \det A - C\tilde{A}B$ //

[3] (1)

$$\begin{cases} r=n\text{のとき}: \tilde{E}_n(r) = E_n \text{ 単位行列.} \\ r=n-1\text{のとき}: \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & O & \vdots \\ & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \; 1 \end{pmatrix} = E_{nn} \\ r \leqq n-2\text{のとき} \quad O. \end{cases}$$

(4) $$\mathrm{rank}\, \tilde{E}_n(r) = \begin{cases} n & r=n\text{のとき} \\ 1 & r=n-1\text{のとき} \\ 0 & r \leqq n-2\text{のとき} \end{cases}$$

(3). 定理3.19より Aの $r+1$ 次以上の小行列式は全て0.

$r \leqq n-2$ ゆえ、特に$(n-1)$次の小行列式は全て0.

従って、余因子行列は零行列.

[3] (2) （定理3.18の証明と同じ方針でする）

方針

Aを基本変形してBになるとき

$\tilde{A}$を~~基本変~~形して$\tilde{B}$になることを示す。

（但し、~~同じ基本変~~形とは限らない）.

正則行列をかけざんして.

① Aのi行めをk倍

$\tilde{A}$のi以外の列を全てk倍.

② Aのi行めとj行めを入れ替え.

$\tilde{A}$のi列めとj列めを入れ替えて-1倍する

③ Aのi行めにj行めのk倍を足す

$\tilde{A}$のj列めからi列めのk倍を引く.

これらができれば、(2)は(4)に帰着できる。