2021/7/7 配布

数学演習 IA—12 回目 (線型空間の定義、外積の計算)

- 次の [1][2][3] に答えよ。

[1] $K = \mathbb{R}$ とする。X を空でない集合とする。X から $\mathbb{R}$ への写像全体のなす集合を V とする。加法 $p : V \times V \to V$ とスカラー倍 $m : K \times V \to V$ を次のように定める。

$$p(f,g)(x) = f(x) + g(x), \qquad m(k,f)(x) = kf(x) \qquad\qquad (f, g \in V,\ k \in K).$$

この時、集合 V は演算 p, m によって線型空間になることを示せ。

[2] 次の集合 W_1, W_2, W_3, W_4 に自然な加法とスカラー倍を考えたものは線型空間になるか？

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; xy = 0 \right\}, \qquad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geq 0,\ y \geq 0 \right\},$$

$$W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 0 \right\}, \qquad W_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x + 3y = 1 \right\},$$

[3] $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{pmatrix}$ を示せ。

答案作成上のコメント：

- 問題 [1]
  - 答案では、加法やスカラー倍を普通に $p(f,g) = f + g$, $m(k,f) = kf$ と書いても良いです。
  - 教科書の定義 5.1(p118) の８つの条件を８つとも確認してください。８つを確認していくと同じような計算を繰り返すことになりますが、８つ全ての証明や計算を記載してください。「同様に」という単語を答案に書くこと自体は許しますが、「同様にと書いて証明を省略する」ことはこの問題の解答に関しては禁止します。練習のためです。
  - 何をするかわからない人はまず、例 5.2 や例 5.3 を解説したビデオも参照してください。
- 問題 [2]。正しくないものは定義 5.9(p142) の条件 I または II に対する反例を挙げるのが良いでしょう。
- 問題 [3]。これは練習問題 4.3(p114) の小問 (3) です。外積の定義は定理 4.8(p110) を採用すると良いでしょう。教科書 (p344) では練習問題 4.3(p114) の小問 (2) を利用していますが、それを利用しない証明を与えることも期待します。