2021/7/14

数学演習 IA—12 回目 (線型空間の定義、外積の計算) 解答例

[**1**] 線型空間の定義 5.1(p118) の 8 条件を書く。$\forall f, \forall g, \forall h \in V$, $\forall h, \forall k \in K = \mathbb{R}$ に対して、

(I-1) $f + g = g + f$.

(I-2) $(f+g)+h = f+(g+h)$.

(I-3) $0 \in V$ を $0(x) = 0 \quad \forall x \in X$ で定義する。この時、$f + 0 = f$.

(I-4) $\forall f \in V$, $\exists g \in V$, such that $f + g = 0$.

(II-1) $(h+k)f = hf + kf$.

(II-2) $k(f+g) = kf + kg$.

(II-3) $(hk)f = h(kf)$.

(II-4) $1f = f$.

これらを一つずつ証明していく。$\forall x \in X$ に対して、

(I-1) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$.

(I-2) $((f+g)+h)(x) = (f+g)(x)+h(x) = f(x)+g(x)+h(x) = f(x)+(g+h)(x) = (f+(g+h))(x)$.

(I-3) $(f+0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x) + 0 = f(x)$.

(I-4) $g(x) = -f(x)$ と定める。この時、$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = f(x) + (-f(x)) = 0 = 0(x)$.

(II-1) $((h+k)f)(x) = (h+k)f(x) = h(f(x)) + k(f(x)) = (hf)(x) + (kf)(x) = (hf+kf)(x)$.

(II-2) $(k(f+g)) = k(f+g)(x) = k(f(x)+g(x)) = kf(x) + kg(x) = (kf+kg)(x)$.

(II-3) $((hk)f)(x) = (hk)f(x) = h(kf(x)) = h((kf)(x)) = (h(kf))(x)$.

(II-4) $(1f)(x) = 1f(x) = f(x)$.

[**2**] 結論：W_3 は線型空間である。他の 3 つは線型空間ではない。以下、それぞれの証明を与える。

- $W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ であり、例題 5.2(1) より線型空間である。
- W_1 は和で閉じていないことを示す。
  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく。$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W_1$ であるが、$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W_1$ である。
- W_2 はスカラー倍で閉じていないことを示す。
  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおく。$\mathbf{x} \in W_2$ であるが、$-\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W_2$ である。
- W_4: $\mathbf{0} \notin W_4$ なので線型空間の条件 (I-3) に反する。

出典：W_1 は例題 5.7(3) の類題。W_4 は例題 5.7(2) の類題。

補足：なお、W_1 はスカラー倍では閉じている。W_2 は和では閉じている。W_4 は和でもスカラー倍でも閉じていない。

[3] 丁寧に展開していけば良い。

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_2d_3 - c_3d_2 \\ c_3d_1 - c_1d_3 \\ c_1d_2 - c_2d_1 \end{pmatrix} \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)(c_2d_3 - c_3d_2) + (a_3b_1 - a_1b_3)(c_3d_1 - c_1d_3) + (a_1b_2 - a_2b_1)(c_1d_2 - c_2d_1) \\
&= (a_2b_3c_2d_3 - a_3b_2c_2d_3 - a_2b_3c_3d_2 + a_3b_2c_3d_2) \\
&\qquad + (a_3b_1c_3d_1 - a_1b_3c_3d_1 - a_3b_1c_1d_3 + a_1b_3c_1d_3) \\
&\qquad + (a_1b_2c_1d_2 - a_2b_1c_1d_2 - a_1b_2c_2d_1 + a_2b_1c_2d_1), \\
\text{右辺} &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \\
&= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)(b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3) - (a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3)(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) \\
&= (\underline{a_1c_1b_1d_1} + a_2c_2b_1d_1 + a_3c_3b_1d_1 + a_1c_1b_2d_2 + \underline{a_2c_2b_2d_2} + a_3c_3b_2d_2 + a_1c_1b_3d_3 + a_2c_2b_3d_3 + \underline{a_3c_3b_3d_3}) \\
&\quad - (\underline{a_1d_1b_1c_1} + a_2d_2b_1c_1 + a_3d_3b_1c_1 + a_1d_1b_2c_2 + \underline{a_2d_2b_2c_2} + a_3d_3b_2c_2 + a_1d_1b_3c_3 + a_2d_2b_3c_3 + \underline{a_3d_3b_3c_3}).
\end{aligned}
$$

右辺の下線部は同じ項なのでキャンセルする。残った項は、左辺・右辺とも正の項が 6 つ、負の項が 6 つである。それらの 12 個の項が左辺と右辺で対応していることは、丁寧に見ることで確認することができる。

答案作成上のコメント：

- 問題 [1]
  - 答案では、加法やスカラー倍を普通に $p(f,g) = f + g$, $m(k,f) = kf$ と書いても良いです。
  - 教科書の定義 5.1(p118) の 8 つの条件を 8 つとも確認してください。8 つを確認していくと同じような計算を繰り返すことになりますが、8 つ全ての証明や計算を記載してください。「同様に」という単語を答案に書くこと自体は許しますが、「同様にと書いて証明を省略する」ことはこの問題の解答に関しては禁止します。練習のためです。
  - 何をするかわからない人はまず、例 5.2 や例 5.3 を解説したビデオも参照してください。
- 問題 [2]。正しくないものは定義 5.9(p142) の条件 I または II に対する反例を挙げるのが良いでしょう。
- 問題 [3]。これは練習問題 4.3(p114) の小問 (3) です。外積の定義は定理 4.8(p110) を採用すると良いでしょう。教科書 (p344) では練習問題 4.3(p114) の小問 (2) を利用していますが、それを利用しない証明を与えることも期待します。