2021/7/21 配布

数学演習 IA—14 回目 (4 章 4.1 節：線形独立、 5 章：線形空間)

- 次の [1][2][3] に答えよ。

[**1**] $\mathbb{R}^6$ の中の 5 本のベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$ が次の 2 条件 (i)(ii) を満たすとする。

(i) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ は線形独立。

(ii) $\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$ は線形従属。

このとき $\mathbf{v}_5$ は, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ の線形結合であることを示せ。

[**2**] $\mathbb{R}^6$ の中の 5 本のベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ が次の 3 条件 (i)(ii)(iii) を満たすとする。

(i) $\mathbf{v}_1$ は $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ の線形結合である。

(ii) $\mathbf{v}_2$ は $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ の線形結合である。

(iii) $\mathbf{v}_3$ は $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ の線形結合である。

このとき、$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ は線形従属であることを示せ。

[**3**] 次の集合 W_1, W_2, W_3, W_4 に自然な加法とスカラー倍を考えたものは線形空間になるか？

W_1: $\mathbb{R}^3$ の平面 $x + 2y + 3z = 0$ と平面 $4x - y - z = 0$ との交わり。

W_2: $\mathbb{R}$ 上の無限回連続微分可能な関数 f で $f'(1) = 0,\ f(2) = 0$ を満たすものの全体。

W_3: 3 次正方行列 A で、$\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(AC) = \mathrm{tr}\,(AD) = 0$ を満たすものの全体。ただし、

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

W_4: 3 次以下の多項式 $f(x)$ で $x^3 f'''(x) = 3x^2 f''(x) - 6x f'(x) + 6 f(x)$ を満たすものの全体。

出題のねらい：

- §4.1 の「線形結合、線形独立、線形従属」を数ベクトルで理解する。
- 練習問題 5.1–5.7(p123–124) の類題を練習する。

答案作成上のコメント：

- 問題 [3]。教科書の §5.1 のような解法で良い。あるいは 7/16(金) の講義でしつこくやったように、「適切な線型写像 T を自分で定義することで、核空間を用いて、$W = T^{-1}(\mathbf{0})$ と表す」という方針でもよい。どちらでも良い。