2021/5/12

数学演習 IA—4 回目 (行列の階数)

[**1**] 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ。

[**2**] 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。

[**3**] A, B を同じサイズの正方行列とする。$P\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}Q = \begin{pmatrix} A+B & B \\ B & B \end{pmatrix}$ を満たすような正則行列 P, Q を求めよ。

[**4**] ブロック分けされている行列 $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ の階数の評価を考えたい。

(1) A が r 次単位行列の時、$\mathrm{rank}X \geq r$ であることを示せ。

(2) $A = E(r) = E_{mn}(r)$ の時、$\mathrm{rank}X \geq r$ であることを示せ。

(3) 一般に、$\mathrm{rank}X \geq \mathrm{rank}A$ であることを示せ。

- 特に一般に、縦または横にブロック分けされている行列に対して、階数の不等式 $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \leq \mathrm{rank}A$ や $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \leq \mathrm{rank}A$ なども成り立つ。以下の問題では、これらを自由に用いて良い。

[**5**] $\mathrm{rank}(A+B) \leq \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B$ であることを示せ。

[**6**] (1) $B = E(r) = E_{mn}(r)$ とする。$\mathrm{rank}(AB) \leq r$ であることを示せ。

(2) 一般の B に対して、$\mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}B$ であることを示せ。

学習における技術的なポイント：

行列のブロック分け (1.2.3 節) の実践練習 (状況に応じた適用)。

証明における「帰着」の議論。特殊な場合から一般の場合への移行。

複数の補題などを用意し、組み合わせて証明を書き切る技術。

ヒント：

[5] は、[3] の結果と [4] の結果と教科書の例題のどれかを組み合わせる。

[4] (1) 定理 2.4 の証明の前半を参照する。(2) は (1) に帰着する。(3) は (2) に帰着する。

[6] (1) A をうまくブロック分けして、問題 [4] の結果を用いる。(2) は (1) に帰着する。