2021/5/12

数学演習 IA—4 回目 (行列の階数), 略解

[1] 3. 途中の計算式を書く必要があります。

[2] $\begin{pmatrix} -4 & \frac{11}{2} & -2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. 途中の計算式を書く必要があります。教科書では整数の事例が多いので、練習としてわざと分数が出てくるようにしてありますので数字が汚いです。

なお、元の行列の 2 行目が 2 で割り切れるので、整数の範囲では逆行列がありません。

[3] $P = \begin{pmatrix} E & E \\ O & E \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} E & O \\ E & E \end{pmatrix}$. 教科書 p339, 問題 2.8(2).

[4] (1) $P = \begin{pmatrix} E & -C \\ O & E \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} E & O \\ -B & E \end{pmatrix}$ とすると、$PXQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & D' \end{pmatrix}$ となる。したがって、

$$\text{rank } X = \text{rank } PXQ = \text{rank } \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & D' \end{pmatrix} = \text{rank } E_r + \text{rank } D' = r + \text{rank } D' \geq r.$$

ここで 1 つ目の等号は定理 2.10, 3 つ目の等号は例題 2.5 の拡張バージョン (講義で解説したもの)。

(2) 左上が r 次正方行列になるようにブロック分けをし直すと、(1) の形の行列になっているので (1) に帰着された。

(3) 正則行列 P, Q を用いて $PAQ = E(r)$ と書くと、$\begin{pmatrix} P & O \\ O & E \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} Q & O \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(r) & B' \\ C' & D \end{pmatrix}$ は (2) の形をしているので、(2) に帰着された。

[5] $\text{rank } (A+B) = \text{rank } \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \text{rank } \begin{pmatrix} A+B & B \\ B & B \end{pmatrix} \geq \text{rank } (A+B)$. ここで最初の等号は例題 2.5(1), 2 つ目の等号は問題 [3]、3 つ目の不等号は問題 [4]。

[6] (0) $\begin{pmatrix} C & O \end{pmatrix}$ とブロック分けされている行列に対して、$\text{rank } \begin{pmatrix} C & O \end{pmatrix} = \text{rank } C$ を示す。$PCQ = E(r)$ とすると、

$$P \begin{pmatrix} C & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & O \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PCQ & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(r) & O \end{pmatrix} = E(r)$$

なので、$\text{rank } \begin{pmatrix} C & O \end{pmatrix} = \text{rank } P \begin{pmatrix} C & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & O \\ O & E \end{pmatrix} = \text{rank } E(r) = r.$

(1) $A = \begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix}$ とブロック分けする。ただし、C の列のサイズを r とする。この時、

$AB = \begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & O \end{pmatrix}$ は小問 (0) の形をしているので、

$$\text{rank } (AB) = \text{rank } \begin{pmatrix} C & O \end{pmatrix} = \text{rank } C \leq r.$$

(2) 正則行列 P, Q を用いて $PBQ = E(r)$ とする。この時 $ABQ = AP^{-1}E(r)$ なので、

$$\text{rank } AB = \text{rank } ABQ = \text{rank } AP^{-1}E(r) \leq r.$$

ここで最初の等号は定理 2.10, 最後の不等号は小問 (1).