2021/5/26 配布

数学演習 IA—6 回目 (連立一次方程式、置換)

[**1**] [教科書 p55, 練習問題 2.10 から。ただし小問は異なります。]　次の連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x+2y+z &= k \\ k^2x+y+4z &= 1 \end{cases}$$

を考える。次のそれぞれの場合に拡大係数行列を簡約化した行列を求め、連立方程式の解を求めよ。

(1) $k \neq \pm 2$ の時。

(2) $k = 2$ の時。

(3) $k = -2$ の時。

[**2**] [教科書 p55, 練習問題 2.12 から。ただし小問は異なります。]　n 次正方行列 B は

条件「全ての i に対して、$\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| < 1$」

を満たしているとする。$E - B$ が正則行列であることを示したい。$\mathbf{x}$ を n 次の縦ベクトルとする。$M := \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$ とおく。$\mathbf{y} = B\mathbf{x}$ と定める。

(1) 全ての i に対して、$|y_i| \leqq M$ であることを示せ。

(2) $M > 0$ とする。この時、「全ての i に対して、$|y_i| < M$」であることを示せ。したがって特に、$\max(|y_1|, |y_2|, \ldots, |y_n|) < M$ であることを示せ。

(3) $B\mathbf{x} = \mathbf{x}$ であるとする。この時、$M = 0$ であることを示せ。特に、$\mathbf{x} = \mathbf{0}$ であることを示せ。

(4) $E - B$ は正則行列であることを示せ。

[**3**] 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 7 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ を互換の積に分解せよ。符号 sgn σ を求めよ。

答案作成上のコメント：[1] の小問 (1)(2)(3) で途中まで共通の式変形をする場合は、(1)(2)(3) に同じ計算を繰り返して書かなくて良いです。その場合、小問 (1) の答案の適切な箇所に式番号などの印をつけて、小問 (2) の答案に「(1) の (*) の式に続けて」のようにどこを引用したのかを明記してください。上手に書いてください。

ヒント：[2](4) $E\mathbf{x}$ を考えてみよ。また、p49,50,51 で繰り返し述べられているように、連立一次方程式の解は $n - r$ 個のパラメータを持つ。したがって特に、連立一次方程式の解が一意的であれば $n = r$ である。この設定で定理 2.7 を思い出してみよう。