2021/5/26 問題配布、6/2 解答配布

数学演習 IA—6 回目 (行列の階数), 略解

[**1**] 簡約化した行列。

$$(1)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{k+2} \\ 0 & 1 & 0 & k-1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-k^2}{k+2} \end{array}\right), \qquad (2)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad (3)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

解。(1) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{k+2} \\ k-1 \\ \frac{1-k^2}{k+2} \end{pmatrix}$.　(2) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.　(3) 解なし。

[**2**] (1) $|y_i| = \left|\sum_{j=1}^n b_{ij}x_j\right| \le \sum_{j=1}^n |b_{ij}x_j| = \sum_{j=1}^n |b_{ij}|\,|x_j| \le \sum_{j=1}^n |b_{ij}|\,M = M\sum_{j=1}^n |b_{ij}| \le M.$

(2) $M > 0$ かつ $\sum_{j=1}^n |b_{ij}| < 1$ の時は、(1) の最後の不等号で $< M$ となる。

(3) $M > 0$ だと仮定して矛盾を導く。この時、

$$M = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|) = \max(|y_1|, |y_2|, \ldots, |y_n|) < M$$

となり、矛盾である。ただし、最初の等号は M の定義、２つ目の等号は $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ より、右側の不等号は小問 (2) による。

(4) 簡単のため $A = E - B$ とおく。
まず「$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ならば $\mathbf{x} = \mathbf{0}$」を示す。$A\mathbf{x} = (E-B)\mathbf{x} = E\mathbf{x} - B\mathbf{x} = \mathbf{x} - B\mathbf{x}$ なので、仮定は $B\mathbf{x} = \mathbf{x}$ を意味する。従って、小問 (3) より、$\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が導かれた。証明終わり。
従って、連立１次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ には自明な解しかない。一般に、「連立一次方程式の解は $n - r$ 個のパラメータを持つ。ただし、n は未知数の個数、r は A の階数である。」したがって特に、「連立一次方程式の解が一意的であれば $n = r$ である。」ここで、定理 2.7「$n = r$ は A が正則と同値」より、A は正則行列である。証明終わり。

[**3**] $\sigma = (4\ 8)(5\ 7)(3\ 6)(2\ 8)(1\ 8)(6\ 7)$ となるので符号は $\mathrm{sgn}\,\sigma = +1$.

定理：n 次正方行列 A に対して次は同値。

(1) A は正則。
(2) A の階数は n.
(3) A の簡約化は単位行列。
(4) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ならば $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
(5) $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ は単射。
(6) $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ は全射。
(7) $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ は全単射。
(8) $\det A \neq 0$.