行列の積の練習問題1

version: May 4, 2020（作成途中）

課題の目標：まずは、２次の正方行列の計算で、行列の積の計算に慣れよう。

$\boxed{1}$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ の時、AB, BA を求めよ。

$\boxed{2}$ $ad - bc \neq 0$ であるとする。$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ の時、AB, BA を求めよ。

定義：逆行列

$AB = BA = E$ が成り立つとき、B は A の逆行列であるという。
この時 $B = A^{-1}$ と書く。

定理：逆行列

$ad - bc \neq 0$ であるとする。$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列は $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ である。

証明：上記の問題 (2) で示したことである。

$\boxed{3}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。$B = {}^tA$, $C = AB - BA$ とする。
B, C を求めよ。また、$AC - CA, BC - CB$ を求めよ。

$\boxed{4}$ $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $H = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とする。 なお、$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位である。

(4-1) X^2, Y^2, Z^2, H^2 を求めよ。

(4-2) $X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1}, H^{-1}$ を求めよ。

(4-2$\frac{1}{2}$) X, Y, Z, H の転置行列を求めよ。

(4-3) XZ, ZX, XY, YX, YZ, ZY を求めよ。HZH を求めよ。

(4-4) さらに $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ とする。S^2, S^{-1} を求めよ。SXS^{-1} を求めよ。

$\boxed{5}$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、$A^2 - (a + d)A$ を求めよ。

$\boxed{6}$ $ad-bc=1$ であるとする。$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、$A+A^{-1}$ を求めよ。

$\boxed{7}$ $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$ とする。AB を求めよ。
また $a^2+b^2\neq 0$ の時に A^{-1} を求めよ。

$\boxed{8}$ $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ とする。$A\ {}^tA, {}^tAA,\ B\ {}^tB, {}^tBB$ を求めよ。

$\boxed{9}$ $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$, とする。$A\ {}^tA, {}^tAA,\ B\ {}^tB, {}^tBB$ を求めよ。

$\boxed{10}$ $A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$ とする。$AB,\ A^{-1}$ を求めよ。

$\boxed{11}$ $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ とする。$A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ {}^tA$ を求めよ。

$B=\begin{pmatrix} a^2-b^2 & 2ab \\ 2ab & b^2-a^2 \end{pmatrix}$ とする。${}^tABA$ を求めよ。

$\boxed{12}$ $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$ とする。${}^tABA$ を求めよ。

$\boxed{13}$ $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$ とする。AB, BA を求めよ。$AB-BA$ を求めよ。

$\boxed{14}$ $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$ とする。AB, BA を求めよ。$AB-BA$ を求めよ。

$\boxed{15}$ $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & 0 \end{pmatrix}$ とする。AB を求めよ。

$\boxed{16}$ $A=\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ とする。AB を求めよ。

$\boxed{17}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ を求めよ。

$\boxed{18}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ba^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d-ba^{-1}c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a^{-1}c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を求めよ。ただし、0 でない実数 a に対して、$a^{-1}=1/a=\dfrac{1}{a}$ などと書く。(補足：5/4 に問題の誤りを修正しました。)

$\boxed{19}$ $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。$b\neq 0$ のとき，BAB^{-1} を求めよ。

$\boxed{20}$ $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。$F=\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $G=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。

素材置き場 : この後は問題を追加するので、番号がズレると思います。整理してから番号をつけます。

$\boxed{20?}$ $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。$AJ\,{}^tA$ を求めよ。

$\boxed{20?}$ 次のそれぞれの A, P に対して、P^{-1} を求めよ。$C=P^{-1}AP$ を求めよ。PCP^{-1} を求めよ。C^n を求めよ。A^n を求めよ。

(i) $A=\begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(ii) $A=\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(iii) $A=\begin{pmatrix} 13 & -30 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(iv) $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

$\boxed{20?}$ $A=\begin{pmatrix} 13 & -30 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}$ とする。$P=\frac{1}{5}(2E+A)$, $Q=\frac{1}{5}(3E-A)$ とする。

(i) $\det(A), \mathrm{tr}(A)$ を求めよ。

(ii) A^2-A-6E を求めよ。

(iii) $P+Q$ を求めよ。$3P-2Q$ を求めよ。

(iv) P^2, PQ, QP, Q^2 を求めよ。

(v) A^n を求めよ。

$\boxed{20?}$ A, B を 2 次の正方行列とする。

(i) $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$ を示せ。$\det(AB)=\det(A)\det(B)$ を示せ。

(ii) さらに P を 2 次の正則行列としたとき，$\mathrm{tr}(P^{-1}AP)=\mathrm{tr}(A)$ を示せ。$\det(P^{-1}AP)=\det(A)$ を示せ。

証明問題

$\boxed{\text{b-1}}$ A を 2 次の正方行列とする。

(i) A が対角行列であれば，条件「すべての 2 次の対角行列 X に対して $AX = XA$」が成り立つことを示せ。

(ii) 条件「すべての 2 次の対角行列 X に対して $AX = XA$」が成り立つとする。このとき，A は対角行列であることを示せ。

(iii) A がスカラー行列であれば，条件「すべての 2 次の正方行列 X に対して $AX = XA$」が成り立つことを示せ。

(iv) 逆に条件「すべての 2 次の正方行列 X に対して $AX = XA$」が成り立つとする。このとき，A はスカラー行列であることを示せ。

(v) $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とする。$ZAZ = A$ ならば A は対角行列である。

(vi) 「すべての 2 次の列ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して，$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が成り立つ」ならば，$A = O$ であることを示せ。

(vii) 「すべての 2 次の列ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して，$A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$ が成り立つ」ならば，$A = B$ であることを示せ。

$\boxed{\text{b-2}}$ A, B が逆行列を持つ時、AB も逆行列を持つことを示せ。

$\boxed{\text{b-3}}$ A が逆行列を持つ時、${}^{t}\!A$ も逆行列を持つことを示せ。