

行列の積の練習問題の解答。

(作成途中)

version: April 27, 2020

使い方の注意:「背景」には、ずっと後で学習する内容を含んでいますので、現時点で全く理解できなくても構いません。気にしないように。興味ある人が検索に便利のようにキーワードを挙げておくだけです。気にしないように(2回目)。

① 答え: $AB = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$ となる。

参考: なお、さらに変形して、 $AB = (ad - bc)E = BA$ と書くこともできる。

② 答え: $AB = E, BA = E$. 問題①を使うとやさしいが、使わずに直接計算してもやさしい。どちらでも良い。

補足: つまり、 $B = A^{-1}$ である。2次の正方行列の逆行列の公式として、以下の問題で自由に用いて良い。

③ 答え: $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$AC - CA = -2A, BC - CB = 2B.$$

狙い: 行列の積が可換ではないこと(非可換と言います)の練習。

背景: 単純リー環 $\mathfrak{sl}(2)$ として学習するものから題材を借りてきています。4年生で学習します。

参考: $[X, Y] = XY - YX$ をリー括弧積と呼ぶことがあります。 $[X, Y] = 0$ の時は X と Y は可換です。 $[X, Y] \neq 0$ の時は X と Y は非可換です。

4 答え : $X^2 = E, Y^2 = E, Z^2 = E, H^2 = E.$

$$X^{-1} = X, Y^{-1} = Y, Z^{-1} = Z, H^{-1} = H.$$

$S^2 = Z, \dots$ 計算結果の表示、途中、後で加筆します。

背景 : これは量子計算機でよく使われる記号と関係式から題材を借りてきています。その分野では、行列 X, Y, Z はそれぞれ X ゲート、 Y ゲート、 Z ゲートと呼ばれます。行列 H は Hadamard ゲート (アダマール・ゲート) と呼ばれているものです。行列 C は位相演算子と呼ばれているもので、Clifford ゲート (クリフォード・ゲート) の一つです。

5 答え : $-(ad - bc)E.$

狙い : 行列の冪や行列の多項式の計算練習。

補足 : A^2 を直接計算するのが普通の解法です。別解としては、与えられた式が $-A((a + d)E - A)$ と変形できることに気がつき、そして、眼がとても良い人は、 $(a + d)E - A$ が問題 1 の B であることに気がつけば (!)、問題 1 を使うこともできます。

背景 : つまり、公式 $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O$ が成り立ちます。これを Cayley-Hamilton (ケーリー・ハミルトン) の定理と言います。4章で学習します。ケーリー・ハミルトンの定理は、サイズが n の正方行列に対しても成り立ちますが、その式の形はもっと複雑になります。

定義 : 行列式、トレース (教科書の p43, 例 1, p111, 問題 5.)

2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、行列式 $\det A = ad - bc,$
トレース $\text{tr}(A) = a + d$ と定める。

サガン鳥栖にいたのはトールス、ここで定義したのはトレース。英語では trace, 日本語では跡。

6 答え： $(a + d)E$.

参考：5 を用いてもいいですし、直接計算してもいいです。

背景：クライン群という分野では、この種の関係式がたくさん使われます。

7 答え： $AB = \begin{pmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

参考：さらに $e = ac - bd$, $f = ad + bc$, $g = \frac{a}{a^2 + b^2}$, $h = -\frac{b}{a^2 + b^2}$ とおくと

$AB = \begin{pmatrix} e & -f \\ f & e \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} g & -h \\ h & g \end{pmatrix}$ のように同じ形で書ける。

別解：教科書の p9, 例題 1.2.2(1) を踏まえた別解。 $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると、
 $A = aE + bJ$, $B = cE + dJ$ と書ける。したがって、 $AB = (aE + bJ)(cE + dJ) = acE^2 + adEJ + bcJE + bdJ^2 = acE + adJ + bcJ - bdE = (ac - bd)E + (ad + bc)J$
と計算することもできる。ここで、教科書の 1.2 節 (p8) の分配法則や、 $E^2 = E$, $EJ = J$, $JE = J$, $J^2 = -E$ などを使った。

背景：実はこれは、複素数を 2 次の正方行列で表すことができる標準的な方法です。可換代数の典型例です。

8 答え： $A^t A = {}^t A A = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$, $B^t B = {}^t B B = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$.

狙い：転置行列の計算の練習。

参考：なおこれは、 $A^t A = (a^2 + b^2)E$ のように書くこともできます。

9 答え : $A {}^tA = {}^tAA = E, B {}^tB = {}^tBB = E.$

定義 : この条件 $X {}^tX = {}^tXX = E$ を満たす行列 X を「直交行列」と言います。教科書 (p119). つまり、問題の A, B はどちらも直交行列です。

背景 : これらは「長さを保つ」という幾何学的な由来のある行列です。 A は原点を中心とする角度 θ の回転を表す行列です。 B は原点を通る直線 $y = (\tan \theta)x$ に関する線対称を表す行列です。ここではまだ幾何の話はしません。行列の積の計算だけをします。

10 答え : $AB = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$

問題 7 の発展形です。直接計算でも求まります。どちらでも良いです。

補足 : $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}$ と解釈することができます。

背景 : 回転行列の積が回転行列となることを表しています。三角関数の加法定理を行列で表したものです。3年生の代数で群準同型の時に再登場する例です。

11 $A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} {}^tA = B, {}^tABA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

12 ${}^tABA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

13 答え： $AB = \begin{pmatrix} ax & ay + bz \\ 0 & cz \end{pmatrix}$.

狙い：上三角行列の積が上三角行列になる (p10 問題 8) を具体的に確かめています。 AB の対角成分が、 A の対角成分と B の対角成分の積になっていることも注目点です。

答え： $BA = \begin{pmatrix} ax & bx + cy \\ 0 & cz \end{pmatrix}$, $AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & ay + bz - bx - cy \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

補足： $AB - BA$ の (1,2) 成分は $(a - c)y + b(z - x)$ とも書けます。

背景：上三角行列の和やスカラー倍や積が上三角行列になります。このことを、上三角行列の全体が多元環となっている、ということが出来ます。非可換な多元環の例です。多元環は代数ともいいます。英語では algebra です。

14 略。

15 16 AB のどの成分も自動的に 0 にはなりません。すなわち、上三角行列や下三角行列のように積では閉じていません。

17 答え： $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

背景：ワイル群の元を三角行列の積で作っています。意味不明だと思います、ごめんなさい。

18 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

背景：三角分解と言います。LU 分解とも言います。

素材置き場：

- 答え： $AB = E, BA = E$.

狙い：2次の正方行列よりもサイズの大きな行列の積の練習。

背景：行列 A は E_8 型のカルタン行列と呼ばれるものです。ルート系に深く関係し、代数群、組み合わせ論、代数幾何など多彩な分野に登場します。

教科書の補足。

- p8 の下から5行目。正方行列 A のべき乗 A^n は指数法則 $A^{m+n} = A^m A^n$ を満たす。 m, n は自然数。
- p10 問題7では「 A, B が共に冪零である」と仮定しているが、仮定を弱めて、「 A, B のどちらか片方が冪零である」としても同じ結論が成り立つ。実際、教科書の巻末 (p196) の証明では $A^m = O$ は使われているが、 $B^n = O$ は使われていない。