置換の練習問題5

version: June 17, 2020

課題の目標：置換の性質を学習する。

S_n は n 文字の置換全体を表す (p41)。

$\boxed{71}$ $\sigma \in S_n$ に対して次の 2 条件は同値。

(a) $\sigma(n) = n$

(b) σ は $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ の置換である。

$\boxed{72}$ $\sigma \in S_n$ に対して次の 2 条件は同値。

(a) $\sigma(1) = 1$

(b) σ は $\{2, 3, \ldots, n\}$ の置換である。

背景：定理 3.2.1 の証明で用いる。

$\boxed{73}$ 写像 $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ は S_n から S_n への全単射であることを示せ。少し言い換えると、$f : S_n \to S_n$ を $f(\sigma) = \sigma^{-1}$ と定める。このとき、f は全単射であることを示せ。

背景：定理 3.3.1 の証明で用いる。

$\boxed{74}$ $i < j$ を一つ固定する。このとき、写像 $\sigma \mapsto \sigma(ij)$ は S_n から S_n への全単射であることを示せ。少し言い換えると、$\rho = (ij) \in S_n$ と定義し、$f : S_n \to S_n$ を $f(\sigma) = \sigma\rho$ と定める。このとき、f は全単射であることを示せ。

背景：定理 3.2.3 の証明で用いる。

定義：転倒数

$\sigma \in S_n$ に対して、集合

$$I(\sigma) := \{(i, j) \mid i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i < j \leq n, \sigma(i) > \sigma(j)\}$$

と定義する。$I(\sigma)$ の元の個数を $l(\sigma)$ とする。$l(\sigma)$ を σ の長さとか転倒数とか呼ぶ。

$\boxed{75}$ 教科書の問題 3.1(p74) の問題 2(1)(2), 3(1)(2)(3)(4)(5) のそれぞれの σ に対して、$l(\sigma)$ を求めよ。

$\boxed{76}$ $i<j$ とする。互換 $\sigma=(ij)$ の長さ $l(\sigma)$ を求めよ。

$\boxed{77}$ $\sigma,\tau\in S_n$ とする。

(1) $l(\sigma)+l(\tau)-l(\sigma\tau)$ は次の集合の元の個数の 2 倍であることを示せ。

$$\{(i,j)\mid i,j\in\mathbb{N},1\leq i<j\leq n,\tau(i)>\tau(j),\sigma\tau(i)<\sigma\tau(j)\}$$

(2) $(-1)^{l(\sigma)}(-1)^{l(\tau)}=(-1)^{l(\sigma\tau)}$ が成り立つことを示せ。

定義：隣接互換

$(i\ i+1)$ の形に書ける互換を隣接互換という。

S_n には隣接互換が $n-1$ 個存在する。あみだくじでの隣との入れ替えを意味する。

$\boxed{78}$ (1) 隣接互換の長さは 1 であることを示せ。

(2) 長さが 1 の元 $\sigma\in S_n$ は隣接互換であることを示せ。

$\boxed{79}$ $\sigma\in S_n$ とする。$\tau=(i\ i+1)$ を隣接互換とする。

(a) $(i,i+1)\in I(\sigma)$ の時、$l(\sigma\tau)=l(\sigma)-1$.

(b) $(i,i+1)\notin I(\sigma)$ の時、$l(\sigma\tau)=l(\sigma)+1$.

$\boxed{80}$ $\sigma\in S_n$ は $l(\sigma)$ 個の隣接互換の積で表せることを示せ。

定理：符号数と転倒数の関係

$\mathrm{sgn}(\sigma)=(-1)^{l(\sigma)}$.

この関係式は今後用いて良い。