練習問題5の解答例

version: June 24, 2020, 暫定版

お願い：解答に誤りを見つけたり、説明がわかりづらい点があれば、落合まで連絡してください。改訂します。

$\boxed{73}$ $f \circ f : S_n \to S_n$ が恒等写像であることを示せば良い。
$(f \circ f)(\sigma) = f(f(\sigma)) = f(\sigma^{-1}) = (\sigma^{-1})^{-1} = \sigma$. 証明終わり。

$\boxed{74}$ $f \circ f : S_n \to S_n$ が恒等写像であることを示せば良い。
$(f \circ f)(\sigma) = f(f(\sigma)) = f(\sigma\rho) = (\sigma\rho)\rho = \sigma(\rho\rho) = \sigma\varepsilon = \sigma$. 証明終わり。

$\boxed{75}$ **2**(1) 15, (2) 8, **3**(1) 7, (2) 6, (3) 6, (4) 9, (5) 17.

コメント：間違ってたら教えてね。

$\boxed{76}$ $l(\sigma) = 2(j-i) - 1$. 証明を書く必要あり。

$\boxed{77}$ $A \cap B = \emptyset$ の時、$A \cup B = A \sqcup B$ と書くことにする。$M = \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \le i \le n\}$ と書く。この時、どこで、入れ替えが起こるか（紐が交差するか）に着目して場合分けをすると、

$$
\begin{aligned}
I(\sigma\tau) &= \{(i,j) \mid i,j \in M, i<j, \sigma(\tau(i)) > \sigma(\tau(j))\} \\
&= \{(i,j) \mid i,j \in M, i<j, \sigma(\tau(i)) > \sigma(\tau(j)), \tau(i) > \tau(j)\} \\
&\quad \sqcup \{(i,j) \mid i,j \in M, i<j, \sigma(\tau(i)) > \sigma(\tau(j)), \tau(i) < \tau(j)\}, \\
I(\tau) &= \{(i,j) \mid i,j \in \mathbb{N}, 1 \le i < j \le n, \tau(i) > \tau(j))\} \\
&= \{(i,j) \mid i,j \in M, i<j, \tau(i) > \tau(j)\} \\
&= \{(i,j) \mid i,j \in M, i<j, \tau(i) > \tau(j), \sigma(\tau(i)) > \sigma(\tau(j))\} \\
&\quad \sqcup \{(i,j) \mid i,j \in M, i<j, \tau(i) > \tau(j), \sigma(\tau(i)) < \sigma(\tau(j))\}, \\
I(\sigma) &= \{(p,q) \mid p,q \in M, p<q, \sigma(p) > \sigma(q))\} \\
&= \{(s,t) \mid s,t \in M, \tau(s) < \tau(t), \sigma(\tau(s)) > \sigma(\tau(t))\} \\
&= \{(s,t) \mid s,t \in M, \tau(s) < \tau(t), \sigma(\tau(s)) > \sigma(\tau(t)), s<t\} \\
&\quad \sqcup \{(s,t) \mid s,t \in M, \tau(s) < \tau(t), \sigma(\tau(s)) > \sigma(\tau(t)), s>t\} \\
&= \{(i,j) \mid i,j \in M, \tau(i) < \tau(j), \sigma(\tau(i)) > \sigma(\tau(j)), i<j\} \\
&\quad \sqcup \{(j,i) \mid j,i \in M, \tau(j) < \tau(i), \sigma(\tau(j)) > \sigma(\tau(i)), j>i\}
\end{aligned}
$$

となる。すなわち、

$$
I(\sigma\tau) = I_1 \sqcup I_2, \qquad I(\tau) = I_1 \sqcup I_3, \qquad I(\sigma) = I_2 \sqcup I_3
$$

となっている。集合 A の元の個数を $\sharp A$ と書くことにする。すると、

$$l(\sigma)+l(\tau)-l(\sigma\tau)=(\sharp I_1+\sharp I_3)+(\sharp I_2+\sharp I_3)-(\sharp I_1+\sharp I_2)=2\sharp I_3$$

となる。

$\boxed{78}$ (1) $\sigma=(i\ i+1)$ の時、$I(\sigma)=\{(i,i+1)\}$ である。これの証明をしなければなりませんね。あとで書きます。

(2)

$\boxed{79}$ (a) 「$I(\sigma\tau)$ は $I(\sigma)$ から $(i,i+1)$ を取り除いた集合である」ことを示す。あとで書きます。

(b) 「$I(\sigma)$ は $I(\sigma\tau)$ から $(i,i+1)$ を取り除いた集合である」ことを示す。あるいは、$\sigma\tau$ に対して (1) を適用することができる、という議論も可能。あとで書きます。

$\boxed{80}$ 方針 : $l(\sigma)$ に関する数学的帰納法。$l(\sigma)=0$ の時は $\sigma=\varepsilon$ である。この時は、「0 個の積」に意味をつけることが悩ましいので除外しよう。$l(\sigma)=1$ の時は、$\boxed{78}$(2) が使える。$l(\sigma)=m$ まで成り立っているときに $l(\sigma)=m+1$ の時を示す。$\boxed{79}$ を用いる。