特別な行列式の練習問題6

version: July 21, 2020

課題の目標：行列式

次の行列の行列式を求めよ。$\boxed{81}$から$\boxed{90}$。

いくつかの問題は、一般のサイズでも問題として成立するので意欲ある人は問題を拡張してみよう。

$\boxed{81}$ ファンデルモンド型。問題 3.5(p62) の 1(1)-(4) やレポート問題 A の類題。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & ab & a+b \\ 1 & bc & b+c \\ 1 & ca & c+a \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & a^2 & b+c \\ b & b^2 & c+a \\ c & c^2 & a+b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 1 & b^2 & (c+a)^2 \\ 1 & c^2 & (a+b)^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a^2-bc & a^3 \\ 1 & b^2-ca & b^3 \\ 1 & c^2-ab & c^3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{82}$ 同伴行列。例題 3.5.3(p61) やレポート問題 B の類題。

$$\begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & -1 \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & x+a_1 \end{pmatrix} = xE - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_6 & -a_5 & -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{83}$ 問題 3.5(p62) 2(1)(2) やレポート問題 C の類題。

$$\begin{pmatrix} x+a & a & a \\ b & x+b & b \\ c & c & x+c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2a+b+c & a & a \\ b & 2b+c+a & b \\ c & c & 2c+a+b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a+b & a & b \\ c & b+c & b \\ c & a & c+a \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{84}$ 群行列式。例 4(p52), 問題 3.3(p53) 4,6 に関係する問題。

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \\ b & a & d & c \\ d & c & b & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x & y & a & a \\ y & x & a & a \\ a & a & x & y \\ a & a & y & x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a+b & b+c & c+a \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -a+b+c & b & c \\ a & a-b+c & c \\ a & b & a+b-c \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ f & a & b & c & d & e \\ e & f & a & b & c & d \\ d & e & f & a & b & c \\ c & d & e & f & a & b \\ b & c & d & e & f & a \end{pmatrix}.$$

$\boxed{85}$ $\begin{pmatrix} 1 & \sin\alpha & \sin\beta \\ \sin\alpha & 1 & -\cos(\alpha+\beta) \\ \sin\beta & -\cos(\alpha+\beta) & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos(\alpha+\beta) \\ \cos\alpha & 1 & \cos\beta \\ \cos(\alpha+\beta) & \cos\beta & 1 \end{pmatrix},$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}.$$

$\boxed{86}$ 巡回行列式。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 & a^4 \\ a^2 & a^3 & a^4 & a \\ a^3 & a^4 & a & a^2 \\ a^4 & a & a^2 & a^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & 0 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ a^2 & 0 & 1 & a \\ a & a^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a+1 & a & a-1 \\ a-1 & a+1 & a \\ a & a-1 & a+1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{87}$ E を n 次正方行列とする。a, b, c, d を数とする。$2n$ 次正方行列 $\begin{pmatrix} aE & bE \\ cE & dE \end{pmatrix}$ の行列式を求めよ。

$\boxed{88}$ そのほか。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi & -\cos\theta\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi & \sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi & -\cos\theta\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi & \sin\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta\cos\psi & \sin\theta\sin\psi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\boxed{89}$ 交代行列。問題 3.5(p62) 2(4) の発展。

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & a & b & c & d & e \\ -a & 0 & f & g & h & i \\ -b & -f & 0 & j & k & l \\ -c & -g & -j & 0 & p & q \\ -d & -h & -k & -p & 0 & r \\ -e & -i & -l & -q & -r & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{91}$ n を奇数とし、A を n 次の交代行列とする。$\det A$ を求めよ。

$\boxed{92}$ (1) $\mathbf{b}$ を n 次の列ベクトル、$\mathbf{c}$ を n 次の行ベクトルとする。$\det(E+\mathbf{bc}) = 1+\mathbf{cb}$ であることを示せ。

(2) K を全ての成分が 1 であるような行列とする。D を対角行列とする。この時、$\det(D+K) = (\det D) + \mathrm{tr}(\widetilde{D})$ であることを示せ。ただし、$\widetilde{D}$ は D の余因子行列であり、$\mathrm{tr}(A)$ は、行列 A のトレース (すなわち対角成分の和) を表す。

$\boxed{90}$ $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{pmatrix}, \quad xE + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+e \end{pmatrix}.$$

$\boxed{93}$ ユニモジュラー行列。レポート問題。

(1) A のすべての成分が整数であり、$\det A = \pm 1$ であるとする。この時、A^{-1} のすべての成分は整数であることを示せ。

(2) A と A^{-1} のすべての成分が整数であるとする。この時 $\det A = \pm 1$ であることを示せ。

$\boxed{94}$ [$\boxed{95}$(2) のための準備。多項式環は整域である。]

$f(x), g(x)$ を n 変数の多項式であるとする。$f(x)g(x) = 0$ がすべての $x \in \mathbb{R}^n$ に対して成り立つとする。この時、「すべての $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(x) = 0$」または「すべての $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $g(x) = 0$」の少なくとも一方が成り立つことを示せ。

$\boxed{95}$ 問題 3.4(p59) の問題 5。余因子行列の行列式。

A を n 次正方行列とし、$\tilde{A}$ を A の余因子行列とする。

(1) $\det(\tilde{A})\det(A) = \det(A)^n$ を示せ。

(2) $\det(\tilde{A}) = \det(A)^{n-1}$ を示せ。

$\boxed{96}$ [$\boxed{97}$ の準備。特別な行列の余因子行列の具体形。]

(1) $A = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ とする。ただし A は n 次正方行列である。$r \leq n-2$ の時、$\widetilde{A} = O$ であることを示せ。

(2) $A = \begin{pmatrix} E_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}$ とする。ただし A は n 次正方行列とする。$n \geq 2$ とする。この時、$\widetilde{A} = E_{nn}$ となることを示せ。ただし、E_{ij} は行列単位である。

$\boxed{123}$ [$\boxed{97}$の準備。階数と基本変形の関係。]

(1) A を簡約な $m \times n$ 行列とする。$\operatorname{rank} A = r$ とする。さらに A の主成分は第 1 列から第 r 列の r 箇所にあるとする。この時、 n 次正則行列 Q が存在して、$A = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$ と書けることを示せ。

(2) A を簡約な $m \times n$ 行列とする。$\operatorname{rank} A = r$ とする。この時、 n 次正則行列 Q が存在して、$A = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$ と書けることを示せ。

(3) A を $m \times n$ 行列とする。$\operatorname{rank} A = r$ とする。この時、m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q が存在して、$A = P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$ と書けることを示せ。

$\boxed{124}$ (1) m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q が存在して、$P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_s & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$ が成り立つとする。この時 $r = s$ となることを示せ。

(2) m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q が存在して、$A = P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$ と書けるとする。この時、$\operatorname{rank} A = r$ であることを示せ。

$\boxed{97}$ [余因子行列の階数。] $n \geq 2$ とする。A を n 次正方行列とし、$\tilde{A}$ を A の余因子行列とする。次を示せ。

(1) $\operatorname{rank} A = n$ ならば $\operatorname{rank} \tilde{A} = n$.

(2) $\operatorname{rank} A = n-1$ ならば $\operatorname{rank} \tilde{A} = 1$.

(3) $\operatorname{rank} A \leq n-2$ ならば $\tilde{A} = 0$.

$\boxed{98}$ AB の余因子行列は $\widetilde{B}\widetilde{A}$ であることを示せ。
ただし、A の余因子行列を $\widetilde{A}$ と書き、B の余因子行列を $\widetilde{B}$ と書いている。

$\boxed{99}$ 基本行列 $P_{ij}, Q_i(c), R_{ij}(c)$ の余因子行列を求めよ。