No.
Date

2010.9.11

1 函数と微分

1.1 函数について

量の変化など --- 「函数」で表す

記号：$f(x)$　$g(x)$，…

イミ「xを与えると$f(x)$が決まる」

xの動く範囲を「定義域」という。

- ・任意に決められる
- ・函数によっては自然に決まる

・$y=f(x)$ … グラフ

（但し函数$y=f(x)$という言い方もする）

代表例

・$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$　$(a_n \neq 0)$

n次多項式　n次函数という

・$f(x)=\sin x$，$\cos x$，$\tan x$（及びその組み合わせ）

--- 三角函数（あとで説明）A.1

・$a>0$として$f(x)=a^x$ --- 指数函数（あとで）A.2

新しい函数のつくり方

・$f(x), g(x) \longrightarrow \alpha f(x)+\beta g(x)$（一次結合）

・$f(x), g(x) \longrightarrow f(g(x))$（合成函数）

例　$f(x)=e^x$，$g(x)=\cos x \longrightarrow f(g(x))=e^{\cos x}$

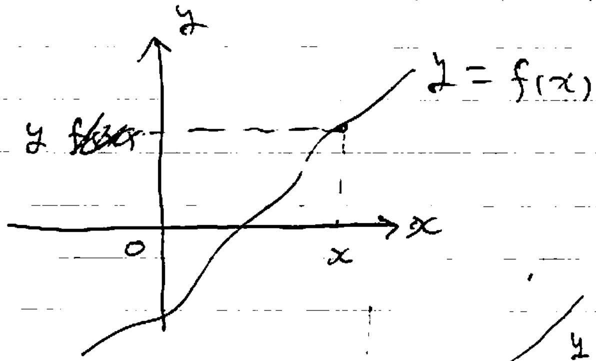
$(e=2.71828\ldots)$

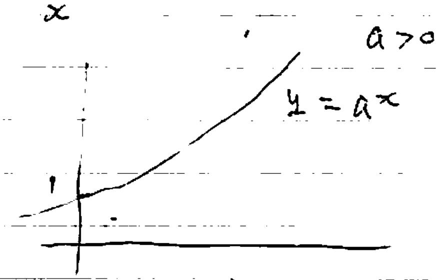
No.
Date

・逆函数

$$y = f(x) \longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

f^{-1} を f の逆函数





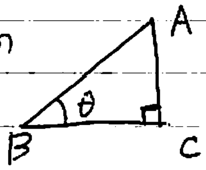
$$y = a^x \longleftrightarrow x = \log_a y$$

~~指数~~

指数函数 ⟷ 対数函数

A.1 三角函数

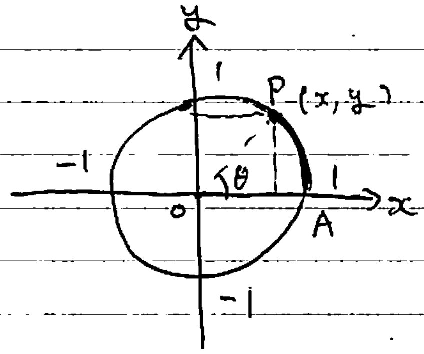
フツーの定ギ



$$\cos\theta = \frac{BC}{AB} \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{AC}{BC}$$

$$\sin\theta = \frac{AC}{AB}$$

ところで角θって何？ 広がり具合をどうとらえるか。そこで



単位円 ： $x^2+y^2=1$

$\theta = \angle POA =$ 弧 $\overset{\frown}{AP}$ の長さ

と約束する。

$x = \cos\theta \quad y = \sin\theta$ とおく。（定ギ）

このとき

$$\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ とおく。

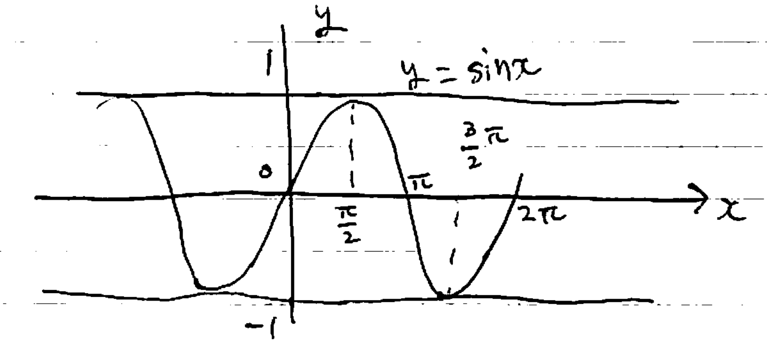
上では $0 \leq \theta < 2\pi$

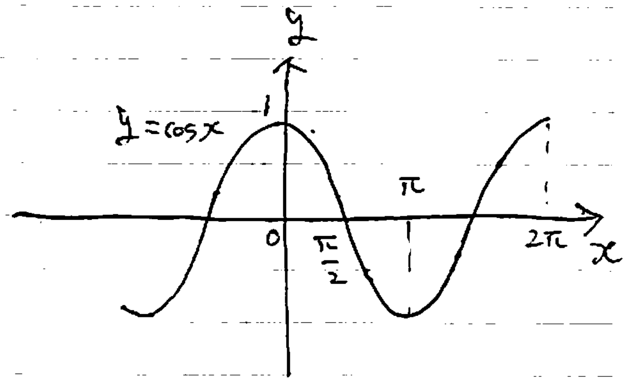
文字をかえて

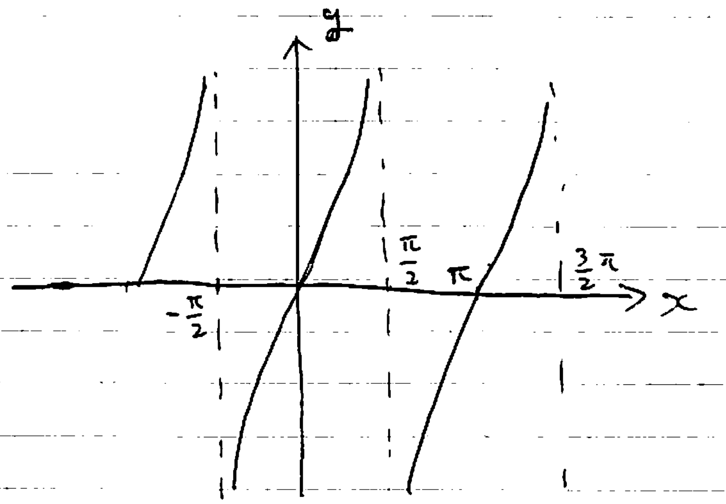
$\cos x$, $\sin x$, $\tan x$

と表す。

- $\cos x$, $\sin x$ は自然に $\mathbb{R}$ 上の函数で周期 2π を持つものになる。







次に「実数」の性質をやります。

問1.「合成函数」をいくつか作れ.

1. $f(x) = x^2 + 2x$ $\quad$ $f(g(x)) = \sin^2 x + 2\sin x$
   $g(x) = \sin x$

2. $f(x) = \sin x$ $\quad$ $f(g(x)) = \sin(x+\pi)$
   $g(x) = x + \pi$

3. $f(x) = 2^x$ $\quad f(g(x)) = 2^{2x^2}$
$g(x) = 2x^2$

4 $f(x) = 3^x$ $\quad f(g(x)) = 3^{x^2+1}$
$g(x) = x^2+1$

5 $f(x) = \sin x$ $\quad f(g(x)) = \sin(\cos x)$
$g(x) = \cos x$

6 $f(x) = \log x$ $\quad f(g(x)) = \log(\sin x)$
$g(x) = \sin x \ (0 < x < \pi)$

7 $f(x) = 5x$ $\quad f(g(x)) = 5 \cdot 5^x = 5^{x+1}$
$g(x) = 5^x$

1.2 「実数」の性質

「数」とは何か？

$(+, \times)$

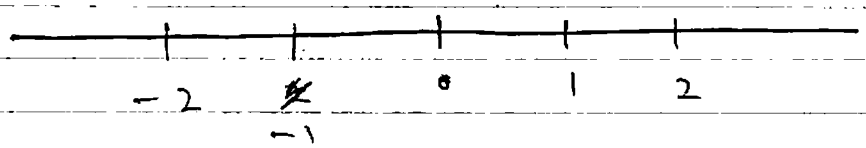
・$1, 2, 3, \cdots$ 自然数 その全体を $\mathbb{N}$ で表す

$(+, \times, -)$

・$0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots$ 整数 $\mathbb{Z}$

・$\left\{ \pm \frac{n}{m} \right\}$ $m, n \in \mathbb{N} \ (m \neq 0)$ $(+, \times, -, \div)$

有理数，全体 $\mathbb{Q}$



$\mathbb{Q}$ は ビッシリある

デデキントの切断

しかし，「すきまだらけ」

「すき間」を 埋める $\longrightarrow$ <u>実数全体</u>　$\mathbb{R}$で表す

「すき間」の部分を無理数

ℝの性質

(1) 大小関係　四則演算 o.k.

(2) $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ で 稠密 である。

$a, b\ (a<b)$ を実数とするとき，$a<x<b$

となる有理数 x がある。

このことから x は無限個あることが言える。

(3) $\mathbb{R}$ は <u>連続性</u> をもつ

(あとで)

A : $\mathbb{R}$の一部　とする。(部分集合)

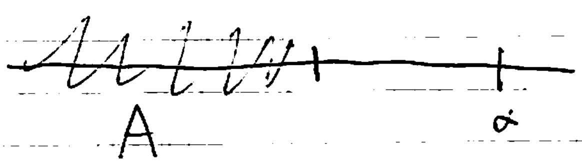
このとき　$A \subset \mathbb{R}$　と書く。

(or $\mathbb{R} \supset A$)

<u>定義</u> (Definition)

Aが上に有界 $\overset{def}{\iff}$ $\forall x \in A \quad x \leq \alpha$

となる α がある



Q. $\varepsilon > 0$ は
$\varepsilon > 0,\ \varepsilon \in \mathbb{Q}$
略としてよいのか？

No.
Date

定理1.1（公理）

Aが上に有界なら，次のような数 $\tilde{\alpha}$ が存在する。

(1) $\forall x \in A \quad x \leq \tilde{\alpha}$

(2) $\varepsilon > 0$ に対して $\tilde{\alpha} - \varepsilon < x_\varepsilon$ となる $x_\varepsilon \in A$ がある。

定義　上の $\tilde{\alpha}$ を Aの上限といって，$\sup A$ と書く。

問1.：「Aが下に有界のとき 下限 $\inf A$ をもつ」
$\inf A$ を定義せよ。

ついでに　最大値と上限のちがい

~~$A = [1, 3$~~$)$

Aの最大値 $\max A$
$\Updownarrow$ def
(1) $\forall x \in A \quad x \leq \tilde{\alpha}$
(2) $\tilde{\alpha} \in A$

問2. $\tilde{\alpha} = \max A$ ならば $\tilde{\alpha} = \sup A$
これを確かめよ。

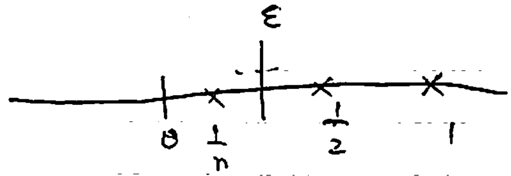
「数列」について

$\mathbb{R}$から数を取り出して番号を付けたもの

$a_1, a_2, a_3, \cdots$

を「数列」といって $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と書く。

例 $a_n = \dfrac{1}{n}$



・ $\dfrac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$

(アルキメデスの公理)

↑

(実数の連続性から証明できる)

定義 $\{a_n\}_n$ が α に収束する ($\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とかく)

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ n をどんどん大きくしていくと, いくらでも α に近づく

「正確にいうと」: 「どんな $\varepsilon > 0$ に対しても, ある番号 N_ε があって

$n \geq N_\varepsilon$ なら $|a_n - \alpha| < \varepsilon$」

上のような $\{a_n\}_n$ を収束列, α を極限という。

定理1.2 (~~Weierstrass~~) ~~Bolzano~~ (Bolzano - Weierstrass)

$\{a_n\}_n$ が有界 のとき，部分列 $\{a_{n'}\}$ を上手くとると
$\{a_{n'}\}$ は収束する.

定理1.3

$\{a_n\}$：収束数列 $\Longleftrightarrow$ $|a_n - a_m| \longrightarrow 0 \quad (n, m \to \infty)$

(このとき $\{a_n\}$ は コーシー列であるという。

(ℝ は完備であるという)

「$a>0$，$\alpha \in \mathbb{R}$ のとき a^α は？」

① $\alpha = n \longrightarrow a^n = a \cdots a$

$\alpha = -n \longrightarrow a^n = \dfrac{1}{a^n}$

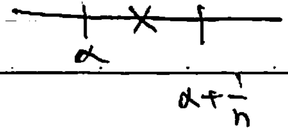
② $\alpha = m \longrightarrow a^{\frac{1}{m}}$ ？ $p^m = a$ となる $p>0$ が有る
それを $p = a^{\frac{1}{m}}$ とかく。

($A = \{x \in \mathbb{R} \mid x>0, x^m < a\}$ とおく
$p = \sup A$ とおく すると $p^m = a$)

③ $a^{\frac{n}{m}} = (a^{\frac{1}{m}})^n = (a^n)^{\frac{1}{m}}$

問：たしかめよ

④ α：無理数 のとき a^α はどう決めるか
次のようにする $\alpha_n \in \mathbb{Q}$ 有理数列 $\{\alpha_n\}$ で

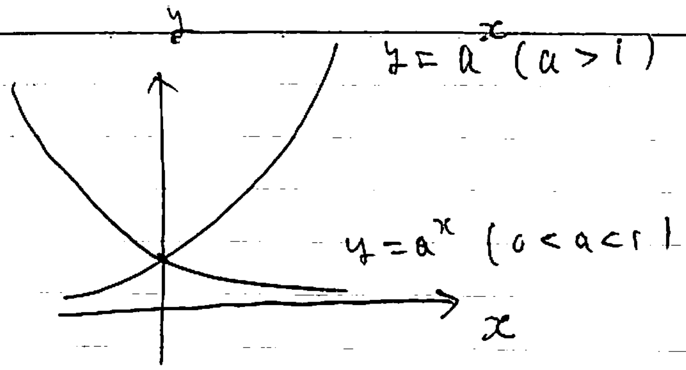


$\alpha_n \longrightarrow \alpha$ となるものをとる。

$a^{\alpha_n} \xrightarrow{n\to\infty} X$. $X = a^\alpha$ とおく//

No.

Date



$$y=a^x$$
$$\Updownarrow$$
$$x=\log_a y$$

1.3 連続関数

- $I=[a,b]$, $(a,b]$ など
- $f(x)$: I上の関数

$x_0 \in I$ を取る

$$* \quad \boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

となるとき f は $x=x_0$ で連続であるという。

($y=f(x)$ のグラフが $x=x_0$ でつながっている)

~~定義~~
定義 : f が I のすべての点で連続のとき「連続関数」という

定理1.4

f : $I=[a,b]$ で連続

$\Longrightarrow$ fは最大値, 最小値をもつ

$\because$) あらすじ

(1) $f(I)=\{f(x) \mid x\in I\}$ とおく。

$f(I)$が「有界」であることを示す。

(2) $\sup f(I)$ $\inf f(I)$ が存在する

(3) $\sup f(I) = \max f(I)$, $\inf f(I) = \min f(I)$

$c \in I$ は?

No.

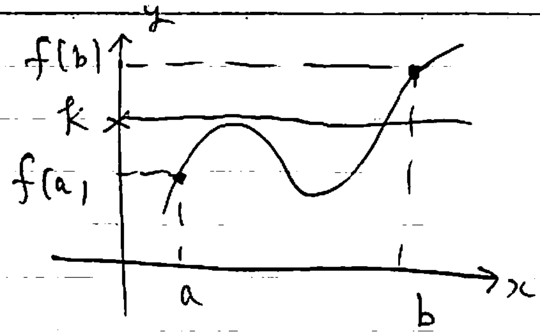
Date

定理1.5 (中間値の定理)

・f : $I = [a, b]$ で連続

・$f(a) < k < f(b)$

$\Longrightarrow$ $k = f(c)$ となる c, $a < c < b$ がある



∵) アイデア

$$A = \{x \in I \mid f(x) < k\}$$

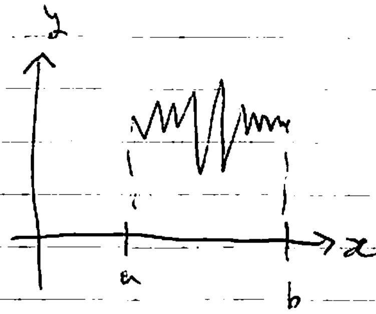
$c = \sup A$ とおく

すると $f(c) = k$

(問:証明を完成せよ)

1.4 函数の微分

f : $[a, b]$ で連続

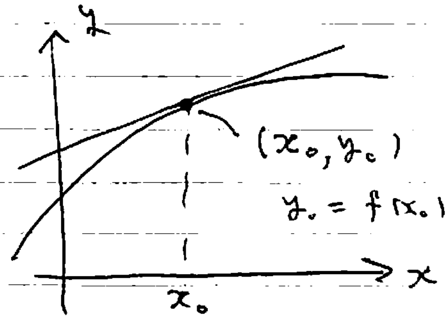


。もう少しなめらかなものは?

念の為

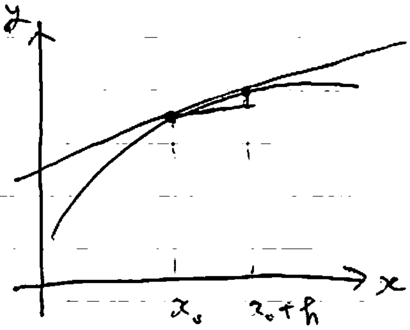
点 (a, b) を通り, 傾き k の直線

$\longleftrightarrow$ $y = k(x-a)+b$



微分可 $\Longrightarrow$ 連続
$\not\Longleftarrow$

傾き $\boxed{\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$



$\xrightarrow[h\to 0]{}$?

義

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\alpha$$

が存在するとき，f は x で微分可能という。

$\alpha=f'(x)$ $\quad \dfrac{df(x)}{dx}$ などとかく

(x_0, y_0) における接線：
$y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0 \quad y_0=f(x_0)$

問「f が x_0 で微分可能 $\Longrightarrow$ f は x_0 で連続」

微分法則

(1) $\{\alpha f(x)+\beta g(x)\}'=\alpha f'(x)+\beta g'(x)$

(2) $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$\because)$ $\dfrac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)$
$+\dfrac{f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}$

No.

Date

(3) $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

(4) $\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$ chain rule

問：上を定義に従って確かめよ。

例

・$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (n=1,2,\cdots)$

idea ・$n=1$ のとき $x'=1$

・$n=k$ まで成り立つとせよ

$\{x^{k+1}\}' = \{x^k x\}' = (x^k)'x + x^k x'$

$= kx^{k-1}x + x^k = (k+1)x$

・$(\cos x)' = -\sin x \qquad (\sin x)' = \cos x$

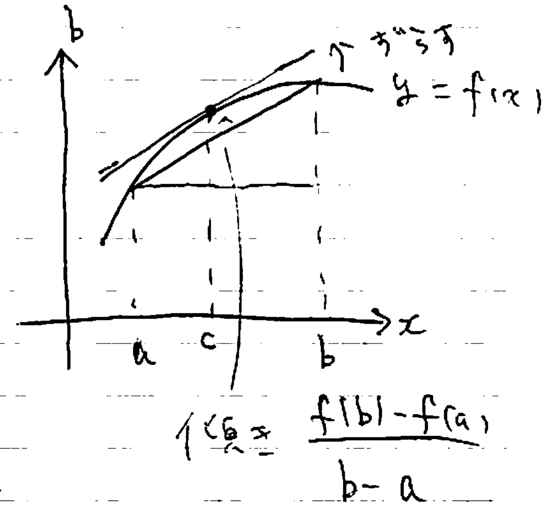
問

$(\tan x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = ?$

No.

Date

1.5 平均値の定理とテイラーの定理



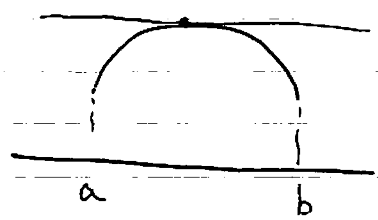
__定理1.6__（平均値の定理）

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

$\longleftrightarrow\ f(b)=f(a)+f'(c)(b-a)$

となる c $(a<c<b)$ ~~なる~~ がある

∵) ① $f(a)=f(b)$ のとき



$\max f(I)=f(c)$

となる c をとる

すると $f'(c)=0$ （たしかめよ!）

② $f(a)\neq f(b)$ のとき

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=l \quad \text{とおく}$$

$\longleftrightarrow\ f(b)-l(b-a)-f(a)=0$

$F(x)=f(x)-l(x-a)-f(a)$ とおく

すると $F(a)=0,\quad F(b)=0$

$\therefore\ F'(c)=0$ なる c がある

$F'(x)=f'(x)-l \qquad \therefore\ l=f'(c)$ //

No.
Date

定理1.7

f：$[a,b]$を含む区間で$n+1$回微分可能

$$\Longrightarrow \quad f(b) = f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

となる c, $a<c<b$ がある。

系

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)$$

(n次テイラー展開)

系 $\begin{cases} f\text{が無限回微分可能} \\ R_n(x) \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty) \end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

(中心 a のテイラー展開)

例

$\{e^x\}' = e^x$ 　　　　　$\therefore$ 次回

$e^0 = 1$

$$\therefore \ e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

No.

Date . .