

1 次の複素数を求めて、複素平面上に図示せよ.

(1) $\frac{(\sqrt{3} + i)^3}{(1 + i)^4}$

(2) $\text{Log}(1 + i)$

2 調和関数について次の問いに答えよ.

(1) 調和関数について説明し, $u(x, y) = e^y \sin x$ が調和関数であることを示せ.

(2) 共役調和関数について説明し, (1) の $u(x, y)$ の共役調和関数を求めよ.

3 (1) 1 次分数変換 F で次の条件をみたすものを求めよ.

$$F(\infty) = i, \quad F(0) = -2, \quad F(1) = -4i$$

(2) F による実軸 \mathbb{R} と上半平面 $\mathbb{H} = \{z \mid \text{Im}(z) > 0\}$ の像を求めて, 図示せよ.

4 (1) 上半平面上の調和関数 $u(z)$ で実軸上で次の境界値をとるものを求めよ.

$$u(x) = \begin{cases} 1 & (|x| < 1); \\ 0 & (|x| > 1). \end{cases}$$

(2) 半無限帯状領域 $D = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, y > 0\}$ 上の調和関数 $v(x, y)$ で次の境界値をとるものを求めよ. (ヒント: 等角写像 $z \mapsto \sin((\pi/2)z)$ を考えよ.)

$$v(x, y) = \begin{cases} 1 & (y = 0 \text{ かつ } |x| < 1); \\ 0 & (x = \pm 1 \text{ かつ } y > 0). \end{cases}$$

5 関数 $F(z) = \frac{1}{z}$ を複素ポテンシャルとする完全流について問いに答えよ.

(1) 流れを表すベクトル場を求めよ.

(2) 流線の概略を図示せよ. また, その図に流れの向きを書き入れよ.

1

v の求め方の説明：

2 (1) $F(z) =$

$F(z)$ の求め方の説明：

(2)

3 (1) $G(z) =$

$G(z)$ の求め方の説明：

(2)

4 (1) $V =$

(2)

5 (1) $\underline{u(x, y) =}$

$u(x, y)$ の求め方の説明 :

(2) $\underline{v(x, y) =}$

$v(x, y)$ の求め方の説明 :

6 $\underline{u(x, y) =}$

$u(x, y)$ の求め方の説明 :