数学 2 B　小テスト　No.7　(6/12)

学生番号　　　　　　　　　　氏名

$\boxed{1}$　三角関数 $\cos(z)$ について次の問いに答えよ．

(1) $\cos(z) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$ を示せ．　(定義を思い出そう.)

(2) 等角写像 $w = \cos(z)$ によって次の図形 D はどのような図形にうつされるか？

$$D = \{z = x + yi \in \mathbb{C} \mid 0 < x < \pi/4,\ y > 0\}$$

(ヒント：(1) から $\cos(z)$ は $z \mapsto (\pi/2) - z$ という変換と $\sin(z)$ の合成である.)

[解答] (1) $e^{i\pi/2} = i$ と指数法則に注意すれば

$$\sin((\pi/2) - z) = \frac{e^{i(\pi/2-z)} - e^{-i(\pi/2-z)}}{2i} = \frac{ie^{-iz} - (-i)e^{iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos(z).$$

(2)(1) から求める図形は

$$D' = \{z = x + yi \in \mathbb{C} \mid \pi/4 < x < \pi/2,\ y < 0\}$$

の $\sin(z)$ による像に一致する．前回の講義でやったことからそれは

$$y < 0, \quad x > 0, \quad 2x^2 - 2y^2 > 1$$

で定まる領域.

数学２B　　小テスト　　No.8　　(6/19)

学生番号　　　　　　　　　氏名

$\boxed{1}$　1 次分数変換 $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ で次の条件をみたすものを求めよ.

$$f(-1) = 1, \qquad f(0) = -1, \qquad f(1) = \infty.$$

ただし、$f(x) = (ax+b)(cx+d)$ の形で答えること.

[解答] 次の等式を w について解く.（教科書の解法を参照.）

$$\frac{(w-1)((-1)-\infty)}{(w-\infty)((-1)-1)} = \frac{(z-(-1))(0-1)}{(z-1)(0-(-1))}$$

ただし（講義中に説明したように）左辺は ∞ を含む項を約分して

$$\frac{w-1}{(-1)-1} = \frac{(z-(-1))(0-1)}{(z-1)(0-(-1))}$$

と考える．答えは

$$f(z) = \frac{3z+1}{z-1}.$$