数学２B　　小テスト　　No.1　　(4/21)

学生番号　　　　　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　次の値（複素数）を求めて，複素平面上に図示せよ．

$$(a)\ \left(\frac{6+8i}{4-3i}\right)^2 \qquad (b)\ \sqrt[4]{-4}$$ （これは $z^4=-4$ の４つの解を表す．）

[**解答**] (a) 絶対値については

$$\left|\left(\frac{6+8i}{4-3i}\right)^2\right| = \frac{|6+8i|^2}{|4-3i|^2} = 4$$

偏角については $\tan\theta = 4/3$ なる角 θ をとると

$$\arg\left(\frac{6+8i}{4-3i}\right)^2 = 2(\arg(6+8i) - \arg(4-3i)) = 2\{\theta - -(\theta - \pi/2)\} = \pi.$$

よって

$$\left(\frac{6+8i}{4-3i}\right)^2 = -4.$$

(b) $z^4=-4$ は

$$|z^4| = |z|^4 = 4, \qquad \arg(z^4) = 4\arg z = \pi + 2\pi n$$

と同値であるので

$$|z| = 1, \qquad \arg(z) = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}.$$

つまり，

$$z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

(図は省略.）

数学２Ｂ　小テスト　No.2　(4/28)

学生番号　　　　　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$ 次の関数が調和関数である事を確かめよ．また，その共役調和関数を求めよ．

$$f(x,y) = e^x \sin y$$

[**解答**] ラプラス作用素 $\Delta = \nabla^2$ を作用させると

$$\Delta f(x,y) = (\partial^2/\partial x^2) f(x,y) + (\partial^2/\partial y^2) f(x,y) = e^x \sin y - e^x \sin y = 0$$

であるので，f は調和関数である．共役調和関数を g とすると，コーシーリーマンの方程式から

$$\partial g/\partial x = -\partial f/\partial y = -e^x \cos y, \quad \partial g/\partial y = \partial f/\partial x = e^x \sin y$$

例えば $(0,0)$ を基準点として，$(0,0)$ と (x,y) を結ぶ曲線を γ とすると

$$g(x,y) = \int_\gamma \nabla g \cdot d\mathbf{x}$$

である．特に γ を $(0,0) \to (x,0) \to (x,y)$ という折れ線として考えると

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \int_0^x \partial g/\partial x(t,0) dt + \int_0^y \partial g/\partial y(x,t) dt \\ &= -\int_0^x e^t dt + \int_0^y e^x \sin t \, dt = 1 - e^x \cos y \end{aligned}$$

よって共役調和関数は $g(x,y) = 1 - e^x \cos y = -e^x \cos y +$ 定数．（共役調和関数は定数を除いて一意に定まる.）