

学生番号

氏名

1 関数 $f(z) = z^2$ が定める等角写像による正方形

$$\{x + iy \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

の像を求めよ。また、正方形の4つの頂点のうち等角性が成り立っていない点はどれか？

[解答] 例えば正方形の右側の辺はパラメータ表示すると

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = 1 + it$$

と表せる。その像は

$$f \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad f \circ \gamma(t) = (1 + it)^2 = (1 - t^2) + 2ti$$

となり、放物線 $x = 1 - (y/2)^2$ の一部になる。同様にして考えれば正方形の像は4つの辺の像で囲まれた領域

$$\{x + iy \mid y \geq 0, |x| \leq 1 - (y/2)^2\}$$

であることがわかる。頂点のうち0以外では $f'(z) = 2z \neq 0$ となるので、その点で $F(z)$ は等角になる。頂点0では正方形の直角の角が2直角にうつされていることから明らかなように等角ではない。