数学２B　　小テスト　　No.4　　(5/16)

学生番号　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　解析関数 $f(z) = z^2$ による次の２曲線の像を求めて図示せよ．また，２曲線の像の「交点」および「交点で（接線が）なす角」を求めよ．

(1) 円 $|z| = 2$,

(2) 直線 $\mathrm{Re}(z) = 1$.

[**解答**]　２つの曲線をパラメータ表示するとそれぞれ

$$\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_1(t) = 2e^{it}$$

と

$$\gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \gamma_2(t) = 1 + it$$

である．それらの像はパラメータ付けられた曲線として

$$f \circ \gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_1(t) = (2e^{it})^2 = 4e^{2it}$$

と

$$f \circ \gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad f \circ \gamma_2(t) = (1 + it)^2 = (1 - t^2) + 2it$$

になる．ここで $f \circ \gamma_1$ は明らかに半径４の円になる．また $f \circ \gamma_2$ はパラメータ t を $\tau = 2t$ に取り替えれば，$\tau \mapsto (1 - (\tau/2)^2, \tau)$ であるので $x = 1 - y^2/4$ という放物線になる．

曲線 (1) と (2) は $1 \pm \sqrt{3}i$ で交わり，交わる角度は $\pi/3$．よって像は

$$(1 \pm \sqrt{3}i)^2 = -2 \pm 2\sqrt{3}i$$

で交わり，（$f'(1 \pm \sqrt{3}) \neq 0$ より）f は $1 \pm \sqrt{3}i$ で等角なので，接線の間の角度は

$$\pi/3.$$

(補角を考えれば $2\pi/3$ でも間違いではない.)