微分積分学　小テスト　No.1　(4/23)

学生番号　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$ 正の実数 a, b, c, d について $a/b < c/d$ であるとき，次を示せ．

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

[**解答**] 仮定 $a/b < c/d$ の両辺に $bd > 0$ を掛けると

$$ad < bc \tag{1}$$

両辺に ab を足しても大小関係はかわらないので

$$a(b+d) < (a+c)b$$

さらに，両辺を正数 $(b+d)b > 0$ で割っても大小関係はかわらないので

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$$

が得られる．同様に，(1) の両辺に cd を足して，$(b+d)d > 0$ で割ると

$$\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

が得られる．

微分積分学　　小テスト　　No.2　　(4/30)

学生番号　　　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　次の関数の微分を求めよ．

$$F(x) = (x^2+1)^5 + 2(x^2+1)^3 + 3(x^2+1) \qquad G(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1})$$

ただし，微分についての法則をどのように用いたか説明すること．

[**解答**] 関数 $F(x)$ は２つの関数

$$f(x) = x^5 + 2x^3 + 3x, \quad g(x) = x^2 + 1$$

の合成として

$$F(x) = f(g(x))$$

と表すことができる．

$$f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 3, \quad g'(x) = 2x$$

であるので，合成関数の微分法則から

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \big(5(x^2+1)^4 + 6(x^2+1)^2 + 3\big) \cdot 2x$$

　$G(x)$ は２つの関数

$$f(x) = \log x, \qquad g(x) = x + \sqrt{x^2+1}$$

の合成として

$$F(x) = f(g(x))$$

と表すことができる．合成関数の微分法則を用いれば

$$(\sqrt{x^2+1})' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

であることがわかるので

$$f'(x) = 1/x, \quad g'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

である．よって

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \big(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\big) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

微分積分学　小テスト　No.3　(5/7)

学生番号　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　長さ 5m の梯子が垂直な壁に立てかけてある．その梯子の下端を 2m/秒の速さで壁から遠ざけるとする．梯子の下端が壁から 3m 離れたとき，上端はどのような速度で降下しているか？

[**解答**] 梯子の下端が壁の位置にあるときを時刻 0 として考える.（このことはあまり本質的ではない．計算の簡単のため）すると時刻 t 秒において，梯子の下端の壁からの距離は $2t$ メートルで，三平方の定理から梯子の上端の高さは

$$f(t) = \sqrt{5^2 - (2t)^2}$$

メートル．$f(t)$ の変化率は

$$f'(t) = \frac{-4t}{\sqrt{5^2 - (2t)^2}}$$

メートル毎秒．梯子の下端が壁から 3 メートル離れるのは $t = 3/2$ のときで，そのときの変化率は

$$f'(3/2) = -\frac{6}{\sqrt{25-9}} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

メートル毎秒である．

微分積分学　　小テスト　　No.4　　(5/14)

学生番号　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　次の極限を求めよ．

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h^2)\cdot\sin(2h)}{h^3},\qquad \lim_{h\to 0}\frac{\sin h-\tan h}{h^3}$$

[解答] (1)

$$\begin{aligned}\frac{\sin(h^2)\cdot\sin(2h)}{h^3} &= \frac{\sin(h^2)}{h^2}\cdot\frac{\sin(2h)}{h}\\ &= \frac{\sin(h^2)}{h^2}\cdot\frac{\sin(2h)}{h}\\ &= 2\cdot\frac{\sin(h^2)}{h^2}\cdot\frac{\sin(2h)}{2h}\end{aligned}$$

と変形する．$h\to 0$ であるとき $h^2\to 0$ かつ $2h\to 0$ であることに注意すれば，極限の性質から

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h^2)\cdot\sin(2h)}{h^3}2\cdot 1\cdot 1=2$$

(2)

$$\begin{aligned}\frac{\sin h-\tan h}{h^3} &= \frac{\sin h\cos h-\sin h}{h^3}\\ &= -\frac{\sin h\cdot(1-\cos h)}{h^3}\cdot\frac{1+\cos h}{1+\cos h}\\ &= -\left(\frac{\sin h}{h}\right)^3\cdot\frac{1}{1+\cos h}\end{aligned}$$

と変形する．極限の性質から

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h-\tan h}{h^3}=-1^3\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

微分積分学　　小テスト　　No.5　　(5/21)

学生番号　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　$x \geq 0$ について次を示せ．

$$x - \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot x^3 \leq \sin x \leq x - \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot x^3 + \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot x^5$$

また，このことを使って $\sin(0.1)$ を小数点以下 6 桁まで求めよ．

[**解答**] $f(x) = x - x^3/6 + x^5/120 - \sin x$ とおくと簡単な計算で

$$f'(x) = 1 - x^2/2 + x^4/24 - \cos x, \quad f''(x) = -x + x^3/6 + \sin x, \quad f'''(x) = -1 + x^2/2 + \cos x$$

$$f^{(4)}(x) = x - \sin x, \quad f^{(5)}(x) = 1 - \cos x.$$

特に $x = 0$ での値は

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = 0$$

である．

　最初に $x \geq 0$ で $f^{(5)}(x) \geq 0$ であることと定理 5 から $f^{(4)}(x)$ が $x \geq 0$ の範囲で増加関数であることがわかる． $f^{(4)}(0) = 0$ であるので，$x \geq 0$ で $f^{(4)}(x) \geq 0$ であることがわかる．

　同様にして順に「$x \geq 0$ で $f'''(x) \geq 0$」，「$x \geq 0$ で $f''(x) \geq 0$」，「$x \geq 0$ で $f'(x) \geq 0$」，「$x \geq 0$ で $f(x) \geq 0$」であることを順に示すことができる．最後は問題の右側の不等式を示している．(左側の不等式の証明も同様.）

　最後の評価は

$$(0.1) - (0.1)^3/6 = 0.099833333...$$

で

$$(0.1)^5/120 < (0.1)^7$$

であることから，$0.09983333... < \sin x < 0.0998335$. 答えは 0.099833.