

学生番号

氏名

1 円板 $|z| < 1$ 上の調和関数 $\Phi(z)$ で、次の境界条件をみたすものを求めよ。

$$\Phi(e^{i\theta}) = \begin{cases} 1, & -\pi/2 < \theta < \pi/2; \\ -1, & \text{それ以外;} \end{cases}$$

また、 Φ の等ポテンシャル線と力線を描け。

(ヒント：宿題に出した例 2 の角度 $\pi/2$ だけ回転させれば良い。)

[解答] $f(1) = 0, f(-1) = \infty, f(i) = 1$ をみたす 1 次分数変換 f

$$f(z) = \frac{-i(z-1)}{(z+1)}$$

を考える。この 1 次分数変換は単位円周を実軸（と無限遠点）にうつし、単位円板を上半平面にうつすことに注意する。

上半平面上では調和関数 Φ^* で境界条件

$$\Phi^*(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ -1, & x < 0; \end{cases}$$

を満たす調和関数として

$$\Phi^*(z) = \frac{2}{\pi} \text{Arg}(z) - 1$$

をとることができる。よって、求める Φ は

$$\Phi(z) = \Phi^*(f(z)) = \frac{2}{\pi} \cdot \text{Arg} \left(\frac{-i(z-1)}{z+1} \right) - 1$$

で与えられる。等ポテンシャル線と力線は Φ^* に対するそれらを f^{-1} でうつしたものになる。(全て円の一部になる。)