

学生番号

氏名

1 次の関数が調和関数である事を確かめよ.

$$u(x, y) = e^y \sin x$$

また, その共役調和関数 v がみたすべき方程式を書き下し, v を求めよ.

[解答] ラプラス作用素 $\Delta = \nabla^2$ を作用させると

$$\Delta u(x, y) = (\partial^2/\partial x^2)u(x, y) + (\partial^2/\partial y^2)u(x, y) = -e^y \sin x + e^y \sin x = 0$$

であるので, u は調和関数である. 共役調和関数を v とすると, コーシーリーマンの方程式から

$$\partial v/\partial x = -\partial u/\partial y = -e^y \sin x, \quad \partial v/\partial y = \partial u/\partial x = e^y \cos x$$

例えば $(0, 0)$ を基準点として, $(0, 0)$ と (x, y) を結ぶ曲線を γ とすると

$$g(x, y) = \int_{\gamma} \nabla g \cdot d\mathbf{x}$$

である. 特に γ を $(0, 0) \rightarrow (x, 0) \rightarrow (x, y)$ という折れ線として考えると

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int_0^x \partial v/\partial x(t, 0) dt + \int_0^y \partial v/\partial y(x, t) dt \\ &= -\int_0^x \sin t dt + \int_0^y e^t \cos x dt = \cos x - 1 + e^y \cos x - \cos x = e^y \cos x - 1 \end{aligned}$$

よって共役調和関数は $v(x, y) = e^y \cos x + \text{定数}$. (共役調和関数は定数を除いて一意に定まる.)