

学生番号

氏名

1 (a) 複素数 $1 + \sqrt{3}i$ と $1 + i$ を複素平面に図示し、それらの偏角の差を求めよ.

(b) 次の値を求めよ.

$$\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + i} \right)^6$$

(c) 方程式 $z^3 = -i$ の全ての解を求めて、複素平面上に図示せよ.

[解答] (a) 省略. (ノートまたは教科書を参照.)

(b) 絶対値については

$$\left| \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + i} \right)^6 \right| = \left(\frac{|1 + \sqrt{3}i|}{|1 + i|} \right)^6 = \sqrt{2}^6 = 2^3 = 8.$$

偏角については

$$\arg \left(\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + i} \right)^6 \right) = 6(\arg(1 + \sqrt{3}i) - \arg(1 + i)) = 6(\pi/3 - \pi/4) = \pi/2.$$

よって

$$\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + i} \right)^6 = 8 \cdot (-1) = -8.$$

(b) $z^3 = -i$ は

$$|z^3| = |i|, \quad \arg(z^3) = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$$

と同値であるので

$$|z|^3 = 1, \quad 3 \arg(z) = \frac{\pi}{2} + \frac{2n\pi}{3}.$$

つまり

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2n\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2n\pi}{3}\right), \quad n = 0, 1, 2.$$

具体的には

$$z = i, \frac{\pm\sqrt{3} - i}{2}$$

(図は省略.)