数学２B　　小テスト　　No.3　　(5/9)

学生番号　　　　　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$ 次の関数が調和関数になるように正の定数 $a > 0$ を定めよ．

$$u(x,y) = e^{ay}\cos(2x)$$

また，求めた a の値についての $u(x,y)$ について，その共役調和関数 $v(x,y)$ がみたすべき方程式を書き下し，v を求めよ．

[**解答**] ラプラス作用素 $\Delta = \nabla^2$ を $u(x,y)$ に作用させると

$$\Delta u(x,y) = (\partial^2/\partial x^2)u(x,y) + (\partial^2/\partial y^2)u(x,y) = -4e^{ay}\cos(2x) + a^2 e^{ay}\cos(2x)$$

であるので，u が調和関数であるためには，$a^2 = 4$ が必要十分． $a > 0$ としているので $a = 2$.

　共役調和関数を v とすると，コーシーリーマンの方程式から

$$\partial v/\partial x = -\partial u/\partial y = 2e^{2y}\cos(2x), \quad \partial v/\partial y = \partial u/\partial x = -2e^{2y}\sin(2x).$$

例えば $(0,0)$ を基準点として，$(0,0)$ と (x,y) を結ぶ曲線を γ とすると

$$v(x,y) = \int_\gamma \nabla g \cdot d\mathbf{x} + v(0,0)$$

である．特に γ を $(0,0) \to (x,0) \to (x,y)$ という折れ線として考えると

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int_0^x \partial v/\partial x(t,0)dt + \int_0^y \partial v/\partial y(x,t)dt \\ &= 2\int_0^x \cos(2t)\,dt - 2\int_0^y e^{2t}\sin(2x)\,dt = -\sin(2x) - e^{2y}\sin(2x) + \sin(2x) = -e^{2y}\sin(2x) \end{aligned}$$

よって共役調和関数は $v(x,y) = -e^{2y}\cos(2x) +$ 定数． （共役調和関数は定数を除いて一意に定まる．）

注意: ちなみに対応する解析関数は

$$f(z) = e^{2iz}.$$