

学生番号

氏名

1 三角関数 $\cos(z)$ について次の問いに答えよ.

(1) $\cos(z) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$ を示せ. (定義を思い出そう.)

(2) 等角写像 $w = \cos(z)$ によって次の図形 D はどのような図形にうつされるか?

$$D = \{z = x + yi \in \mathbb{C} \mid 0 < x < \pi/4, y > 0\}$$

(ヒント: (1) から $\cos(z)$ は $z \mapsto (\pi/2) - z$ という変換と $\sin(z)$ の合成である.)

[解答] (1) $e^{i\pi/2} = i$ と指数法則に注意すれば

$$\sin((\pi/2) - z) = \frac{e^{i(\pi/2-z)} - e^{-i(\pi/2-z)}}{2i} = \frac{ie^{-iz} - (-i)e^{iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos(z).$$

(2)(1) から求める図形は

$$D' = \{z = x + yi \in \mathbb{C} \mid \pi/4 < x < \pi/2, y < 0\}$$

の $\sin(z)$ による像に一致する. 前回の講義でやったことからそれは

$$y < 0, \quad x > 0, \quad 2x^2 - 2y^2 > 1$$

で定まる領域.