数学 2 B　　小テスト　　No.9　　(6/27)

学生番号　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　円環領域 $1 < |z| < 2$ 上の調和関数 $\Phi(z)$ で，次の境界条件をみたすものを求めよ．

$$\Phi(z) = \begin{cases} +100, & |z| = 1 \text{ の場合}; \\ -100, & |z| = 2 \text{ の場合}. \end{cases}$$

また，$\Phi(z)$ を実部とする解析関数 $F(z) = \Phi(z) + i\Psi(z)$ を求め，$\Phi(z) = $ 一定 と $\Psi(z) = $ 一定 で表される曲線がどのようになるかを図示せよ．
（注：$F(z)$ は 領域 $1 < |z| < 2$ 全体で一価関数にはならないが，この問題では重要ではない．）

[**解答**]　前回の講義で述べたことから $\Phi(z) = a \log|z| + b$ の形になる．そこで a, b を

$$a \log 1 + b = 100, \qquad a \log 2 + b = -100$$

を満たすように選べば良い．具体的には $a = -200/\log 2$, $b = 100$ であって

$$\Phi(z) = -\frac{200}{\log 2} \cdot \log|z| + 100.$$

後半は，共役調和関数を（以前やった方法で）求めても良いがかなり大変である．ただ，$\Phi(z)$ の形から

$$F(z) = -\frac{200}{\log 2} \cdot \log z + 100 = -\frac{200}{\log 2} \cdot (\log|z| + i \arg(z)) + 100.$$

であることがわかる.（解析関数 $\log z$ の実部が $\log|z|$ であったことを思い出そう.）また，$\Phi(z) = $ 一定 で表される曲線は原点を中心とした円になり，$\Psi(z) = $ 一定 で表される曲線は原点を通る半直線になる．