数学２Ｂ　　練習問題　　No.1　　(4/13)

$\boxed{1}$　次の言葉，記号について説明せよ．

複素数，実部，虚部，複素共役，極表示（極形式），偏角，偏角の主値，絶対値，
オイラーの公式，ドモアブルの公式，べき根，領域 *, arg と Arg,

また，次の事柄について説明せよ．

(1) 2 つの複素数 α, β の極座標と積 $\alpha\beta$ および商 α/β の極座標の関係.

(2) 複素数 α の極座標とべき乗 α^n の極座標の関係.

(3) 複素数 α の極座標とべき根 $\sqrt[n]{\alpha}$（つまり $z^n = \alpha$ の解）の極座標の関係.

(4) 複素数 α とその複素共役 $\overline{\alpha}$ に極座標の関係.

$\boxed{2}$　次の値を (a) 通常の計算と (b) 極座標をつかった幾何学的な方法で求めよ．

$$(a)\ (1+\sqrt{3}i)^3 \qquad (b)\ \frac{1+i}{1-i} \qquad (c)\ (1+i)^5$$

$\boxed{3}$　次の値（複素数）を求めて，複素平面上に図示せよ．

$$(a)\ \left(\frac{6+8i}{4-3i}\right)^2 \qquad (b)\ \sqrt[4]{-4}$$ （これは $z^4 = -4$ の 4 つの解を表す.）

$\boxed{4}$　次の方程式の解を求めて，複素平面上に図示せよ．

(1) $z^3 = 1 + i$,

(2) $z^2 + (7+i)z + 24 + 7i = 0$.

$\boxed{5}$　次の等式と不等式を示せ．

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2, \qquad |z+w| \leq |z| + |w|$$

★ 教科書の問題 1.1，1.2 も（少なくとも奇数番号の答えのある問題は）やっておくこと．

数学２B　練習問題　No. ２（改訂版）　(4/20)

$\boxed{1}$　次の事柄について説明せよ．

(1) 複素変数の指数関数 e^z と三角関数（$\sin z, \cos z, \tan z$）の定義．

(2) 複素変数の双曲線関数（$\sinh z, \cosh z, \tanh z$）の定義．

(3) 対数関数 $\ln(z)$ と一般ベキ z^α の定義とその多価性．

(4) 対数関数の主値 $\mathrm{Ln}(z)$ について説明せよ．

$\boxed{2}$　次の等式を確かめよ．

$$\sin(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \quad (z = x + iy)$$

また $\cos(z)$ について同様の等式を導け．

$\boxed{3}$　次の等式を確かめよ．

$$\cosh(z + w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w).$$

また $\sin(z + w)$ について同様の等式を導け．

$\boxed{4}$　次の等式を確かめよ．

$$(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1$$

$|\sin(z)| \leq 1$ は常に成り立つか？

$\boxed{5}$　次の値を求めよ．

(1) $\cos(1 + i)$

(2) $\sin \pi i$

(3) $\ln i$

(4) i^i

$\boxed{6}$　次の方程式の解を全て求めよ．

(1) $\cos z = 3i$

(2) $\cosh z = 0$

★ 教科書の 1.6 節の節末問題 (p36) 1–15，１．７節の節末問題（p41）3–6，9–11，1.8 節の節末問題 (p46）5–18 のうち少なくとも奇数番号の答えのある問題をやっておくこと．

数学２B　　練習問題　　No.3　　(4/27)

$\boxed{1}$　次の事柄について説明せよ．

(1) 複素変数の関数が解析的（正則）であることの定義とコーシー・リーマンの関係式（方程式）

(2) 解析関数とラプラス方程式および調和関数の関係と共役調和関数

$\boxed{2}$　次を示せ．

(1) コーシー・リーマンの方程式から解析関数の実部，虚部が調和関数になること．

(2) u が調和関数で，v が u の共役調和関数であるとき，u は $-v$ の共役調和関数であること．

$\boxed{3}$　解析関数 $f(z)$ を極座標 (r, θ) を用いて

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta), \qquad z = re^{i\theta}$$

とあらわすとき，コーシー・リーマンの方程式は

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta, \qquad v_r = -\frac{1}{r} u_\theta,$$

と表されることを示せ．(教科書 p25 参照)

$\boxed{4}$　$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が解析関数であるとき，次を示せ．

$$f'(z) = u_x + iu_y = v_y + iv_x$$

$\boxed{5}$　調和関数 $u(x, y)$ に対して，共役調和関数 $v(x, y)$ を求める方法を説明し，次の場合に共役調和関数を求めよ．また，対応する解析関数を求めよ．

(1) $u(x, y) = x^2 - y^2$

(2) $u(x, y) = e^x \cos x$

(3) $u(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

$\boxed{6}$　与えられた関数が調和関数であるように a を定め，共役調和関数を求めよ．

(1) $u(x, y) = ax^3 + y^3$

(2) $u(x, y) = e^{ax} \cos y$

★ 教科書の 1.4 節の節末問題 (p27) 1–12，17–28 のうち少なくとも奇数番号の答えのある問題をやっておくこと．(いくつかは上の問題に含まれている．)