

5 次方程式の解法

落合啓之 (ochiAI ひろゆき)

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所

オープンキャンパス, 2026 年 8 月 1 日

- この講義は、写真撮影 OK です。
- 他の企画は、それぞれのルールに従ってください。
- 講義資料は、本日夕方に、落合の webpage に掲載予定です。
- 「puki 落合啓之」で検索。「私の本棚」→「対外的な講演」の欄を見てください。

- 目的：5 次方程式 $x^5 - x + c = 0$ の解法を紹介する。
- 特徴：この 5 次方程式は冪根 $\sqrt[n]{\dots}$ と加減乗除では解けないことがわかっているので、解き方に何らかの工夫が必要。
- 工夫：小数を用いる。
- 練習：2 次方程式 $x^2 - x + c = 0$ を $\sqrt{\dots}$ を用いずに解く。

$$x^2 - x + c = 0$$

- まず $c = 0.01$ の場合の方程式を解いてみる。
- $x = x^2 + c$.
- $a_1 = 0$ として、
 $a_{n+1} = a_n^2 + c$ によって、 $a_2, a_3, \dots$ を定める。
- キーワード：数列、漸化式、力学系
- 計算結果 (スマホの電卓で実行可能)

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 0.01$$

$$a_3 = 0.0101$$

$$a_4 = 0.01010201$$

$$a_5 = 0.0101020506060401$$

$$a_6 = 0.01010205142644699515169460280801$$

$$a_7 = 0.0101020514430225797694953829018919605304201...$$

$$a_8 = 0.0101020514433574745862350273902977808792370...$$

$$a_9 = 0.0101020514433642408355685505608504083470957...$$

...

$$c = 0.01$$

- 計算結果 (再掲)

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 0.01$$

$$a_3 = 0.0101$$

$$a_4 = 0.01010201$$

$$a_5 = 0.0101020506060401$$

$$a_6 = 0.01010205142644699515169460280801$$

$$a_7 = 0.0101020514430225797694953829018919605304201...$$

$$a_8 = 0.0101020514433574745862350273902977808792370...$$

$$a_9 = 0.0101020514433642408355685505608504083470957...$$

...

- チート：真の値 $x = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2} = \frac{5 - 2\sqrt{6}}{10}$
 $= 0.0101020514433643803605431850588217216068105...$

$$c = 0.001$$

- $c = 0.001$ の時の $x = x^2 + c$ を解く。
- $a_1 = 0$ として、
 $a_{n+1} = a_n^2 + c$ によって、 $a_2, a_3, \dots$ を定める。
- 計算結果

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 0.001$$

$$a_3 = 0.001001$$

$$a_4 = 0.001001002001$$

$$a_5 = 0.001001002005006006004001$$

$$a_6 = 0.00100100200501402604406909411411609406002800...$$

$$a_7 = 0.00100100200501404210022147095986344004608388...$$

$$a_8 = 0.00100100200501404213236595240393032378585943...$$

$$a_9 = 0.00100100200501404213243030578468161903090794...$$

$$c = 0.0001$$

- $c = 0.0001$ の時の $x = x^2 + c$ を解く。
- $a_1 = 0$ として、
 $a_{n+1} = a_n^2 + c$ によって、 $a_2, a_3, \dots$ を定める。
- 計算結果

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 0.0001$$

$$a_3 = 0.00010001$$

$$a_4 = 0.0001000100020001$$

$$a_5 = 0.00010001000200050006000600040001$$

$$a_6 = 0.00010001000200050014002600440069...$$

$$a_7 = 0.00010001000200050014004201000221...$$

$$a_8 = 0.00010001000200050014004201320365...$$

$$a_9 = 0.00010001000200050014004201320429...$$

データを並べる

- $c = 0.01$,
 $a_8 = 0.0101020514433574745862350273902977808792370...$
- $c = 0.001$,
 $a_8 = 0.00100100200501404213236595240393032378585943...$
- $c = 0.0001$,
 $a_8 = 0.00010001000200050014004201320365...$
- 同じパターンが見える 1, 1, 2, 5, 14, 42...
- 注意点。 $c = 0.01$ の時は 42, 132 は読み取りづらい。
- 学び：読み取りづらい時はデータの取り方を変えてみても良い

- $1, 1, 2, 5, 14, 42, \dots$ から a_8 を復元するには？
- $c = 0.01$,
 $a_8 = 0.0101020514433574745862350273902977808792370\dots$
- $c = 0.001$,
 $a_8 = 0.00100100200501404213236595240393032378585943\dots$
- $c = 0.0001$,
 $a_8 = 0.00010001000200050014004201320365\dots$
- $$a_8 = 1 \times c + 1 \times c^2 + 2 \times c^3 + 5 \times c^4 + 14 \times c^5 + 42 \times c^6 + \dots$$
$$= c + c^2 + 2c^3 + 5c^4 + 14c^5 + 42c^6 + \dots$$
- キーワード：多項式、冪級数。べき。

ここまでのまとめ

- 2 次方程式 $x = x^2 + c$ の解

$$x = c + c^2 + 2c^3 + 5c^4 + 14c^5 + 42c^6 + 132c^7 + \dots$$

- 検算: $x^2 = (c + c^2 + 2c^3 + 5c^4 + 14c^5 + 42c^6 + 132c^7 + \dots)^2$

$$\begin{aligned} &= c^2 + c^3 + 2c^4 + 5c^5 + 14c^6 + 42c^7 + \dots \\ &\quad + c^3 + c^4 + 2c^5 + 5c^6 + 14c^7 + 42c^8 + \dots \\ &\quad + 2c^4 + 2c^5 + 4c^6 + 10c^7 + 18c^8 + 84c^9 + \dots \\ &\quad + 5c^5 + 5c^6 + 10c^7 + 25c^8 + 70c^9 + \dots \\ &\quad + 14c^6 + 14c^7 + 28c^8 + 70c^9 + \dots \\ &\quad + 42c^7 + 42c^8 + 84c^9 + \dots \end{aligned}$$

5 次方程式

- このやり方なら 5 次方程式 $x^5 - x + c = 0$ でもできる。
- $x = x^5 + c$ と変形。
- $a_1 = 0$ として、 $a_{n+1} = a_n^5 + c$ で $a_2, a_3, \dots$ を定める。
- $c = 0.01$ の時の結果

$$a_1 = 0.01$$

$$a_2 = 0.0100000001$$

$$a_3 = 0.01000000010000000500000010000000100000000500000001$$

$$a_4 = 0.010000000100000005000000350000016000000655\dots$$

$$a_5 = 0.010000000100000005000000350000028500002530\dots$$

$$a_6 = 0.010000000100000005000000350000028500002530\dots$$

- 他の c でも求めてみる $\rightarrow$ 結果をまとめると
- $a_6 = 1 \times c + 1 \times c^5 + 5 \times c^9 + 35 \times c^{13} + 285 \times c^{17} + 2530 \times c^{21} + \dots$
 $= c(1 + c^4 + 5c^8 + 35c^{12} + 285c^{16} + 2530c^{20} + \dots).$

ここまでのまとめ

- 2 次方程式 $x^2 - x + c = 0$ の解

$$\begin{aligned}x &= c + c^2 + 2c^3 + 5c^4 + 14c^5 + 42c^6 + 132c^7 + \cdots \\&= c(1 + c + 2c^2 + 5c^3 + 14c^4 + 42c^5 + 132c^6 + \cdots)\end{aligned}$$

- 5 次方程式 $x^5 - x + c = 0$ の解

$$x = c(1 + c^4 + 5c^8 + 35c^{12} + 285c^{16} + 2530c^{20} + \cdots)$$

- 課題：ここに出てきた自然数の列

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, ... や

1, 1, 5, 35, 285, 2530, ... は何だろう？

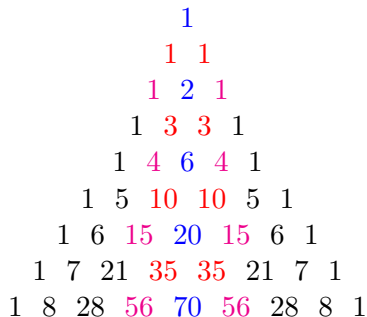
パスカルの三角形

- 上にある2つの数字を足したものを順次書いていく
- 組み合わせの数 ${}_nC_k$ を書き表したものになっている

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

中央二項係数

- 真ん中の数字に注目する。
- 奇数段は真ん中の2つが一番大きい（赤）。
- 偶数段は真ん中が一番大きい（青）。



k	0	1	2	3	4
${}_{2k+1}C_k$	1	3	10	35	126
${}_{2k}C_k$	1	2	6	20	70
${}_{2k}C_{k-1}$	?	1	4	15	56

比較してみる

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
未知	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862
${}_{2k+1}C_k$	1	3	10	35	126	462	1716	6435	24310	92378
${}_{2k}C_k$	1	2	6	20	70	252	924	3432	12870	48620
${}_{2k}C_{k-1}$	?	1	4	15	56	210	792	3003	11440	43758

- どんなことがわかるかな？
- 縦の4つの数字「黒、赤、青、紫」を比較してみよう

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
未知	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862
${}_{2k+1}C_k$	1	3	10	35	126	462	1716	6435	24310	92378
${}_{2k}C_k$	1	2	6	20	70	252	924	3432	12870	48620
${}_{2k}C_{k-1}$	?	1	4	15	56	210	792	3003	11440	43758

觀察結果

- 青 + 紫 = 赤
- 青 - 紫 = 黒
- 赤 ÷ 黒 = 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...
- 青 ÷ 黒 = 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

未知の数を $M_0, M_1, M_2, \dots$ と書くことにする。

- 青 + 紫 = 赤
- 青 - 紫 = 黒
- 赤 $\div$ 黒 = 1, 3, 5, 7, 9, 11, $\dots$
- 青 $\div$ 黒 = 1, 2, 3, 4, 5, 6, $\dots$

- ${}_{2k}C_k + {}_{2k}C_{k-1} = {}_{2k+1}C_k$
- ${}_{2k}C_k - {}_{2k}C_{k-1} = M_k$
- ${}_{2k+1}C_k = (2k+1)M_k$
- ${}_{2k}C_k = (k+1)M_k$

未知の数の表示式

- $M_k = 2kC_k - 2kC_{k-1}$

- $M_k = \frac{2k+1C_k}{2k+1}$

- $M_k = \frac{2kC_k}{k+1}$

- 数学 A や数学 II で学習する内容

$$2kC_k - 2kC_{k-1} = \frac{2kC_k}{k+1}, \quad \frac{2kC_k}{k+1} = \frac{2k+1C_k}{2k+1} \text{ を示せ}$$

ここまでのまとめと将来

- 2 次方程式の一つの解を小数の形で求めた
- 係数に現れる未知の数列は二項係数で表せた
- データから規則性を発見することができる (→ 研究)
- まだ証明していない。発見と証明は別
- これらの式は正しいということが知られている
- カタラン数という。Catalan は人の名前

- 2 次方程式の解の公式を知っている
-

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2} \stackrel{?}{=} c \left(1 + \frac{2C_1}{2}c + \frac{4C_2}{3}c^2 + \frac{6C_3}{4}c^3 + \frac{8C_4}{5}c^4 + \dots \right)$$

- だいぶ、見かけの異なる 2 つのものが等しいと言っている。
そういうことは今までもあった $\frac{2}{3} = 0.6666\dots$

- 上の公式も正しい
ただし $-\frac{1}{4} < c < \frac{1}{4}$ の範囲で。

- キーワード：テーラー展開、収束半径、^{べき}冪級数

$$\bullet 1 + \frac{2C_1}{2 \times 4} + \frac{4C_2}{3 \times 4^2} + \frac{6C_3}{4 \times 4^3} + \frac{8C_4}{5 \times 4^4} + \frac{10C_5}{6 \times 4^5} + \dots = 2$$

5 次方程式

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
未知	1	1	5	35	285	2530	23751	231880	2330445
${}_{5k+1}C_k$	1	6	55	560	5985	65780	736281	8347680	95548245
${}_{5k}C_k$	1	5	45	455	4845	53130	593775	6724520	76904685
${}_{5k}C_{k-1}$	?	1	10	105	1140	12650	142506	1623160	18643560

観察結果

- 青 + 紫 = 赤
- 青 - 紫 ≠ 黒
- 赤 ÷ 黒 = 1, 6, 11, 16, 21, ...
- 青 ÷ 黒 = 1, 5, 9, 13, 17, ...
- 青 - 黒 = 紫 × 4

↓ 下で修正

未知の数を $M_0, M_1, M_2, \dots$ と書くことにする。

- 青 + 紫 = 赤
- 青 - 黒 = 紫 $\times 4$
- 赤 $\div$ 黒 = 1, 6, 11, 16, 21, $\dots$
- 青 $\div$ 黒 = 1, 5, 9, 13, 17, $\dots$

- $5k C_k + 5k C_{k-1} = 5k+1 C_k$
- $5k C_k - 45k C_{k-1} = M_k$
- $5k+1 C_k = (5k+1) M_k$
- $5k C_k = (4k+1) M_k$

5 次方程式の未知の数の表示式

- $M_k = {}_{5k}C_k - 4 \times {}_{5k}C_{k-1}$

- $M_k = \frac{{}_{5k+1}C_k}{{}_k+1}$

- $M_k = \frac{{}_{5k}C_k}{4k+1}$

- 数学 A や数学 II で学習する内容

$${}_{5k}C_k - 4 \times {}_{5k}C_{k-1} = \frac{{}_{5k}C_k}{4k+1}, \quad \frac{{}_{5k}C_k}{4k+1} = \frac{{}_{5k+1}C_k}{5k+1} \text{ を示せ}$$

ここまでのまとめと将来

- 5 次方程式の一つの解を小数の形で求めた
- 係数に現れる未知の数列は二項係数で表せた
解は $c \left(1 + \frac{5C_1}{5}c^4 + \frac{10C_2}{9}c^8 + \frac{15C_3}{13}c^{12} + \frac{20C_4}{17}c^{16} + \dots \right)$
- 数列の記号では $c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5kC_k}{4k+1} c^{4k}$
- 2 次方程式を解いた時の方法が 5 次方程式にも通用した
- 適切な修正 (modify) が肝
- 一般カタラン数または Fuss-Catalan 数という
- キーワード：一般超幾何関数

ここで大きく話が変わって：

- 京都や札幌のような格子状の街を考える。
- 原点からスタートして右または上に一步進む。
- ゴールを (j, k) とする。
- この時、行き方 (= 道) の本数は ${}_{j+k}C_k$ 本

設定の変更

- $x \geq y$ の範囲だけを動けるとする。
- ゴールは (k, k) とする。
- 問題：自然数 k に対して、そのような道の総数 R_k を数えよ。

- $k = 1$ の時 $(0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (1, 1)$ の一つ。
- $k = 2$ の時 $(0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow \dots \rightarrow (2, 1) \rightarrow (2, 2)$ を補う.
 $(0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (2, 0) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (2, 2)$
 $(0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (2, 2)$ の2本
- $k = 3$ の時 $(0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow \dots \rightarrow (3, 2) \rightarrow (3, 3)$ を補う.
 $(0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (2, 0) \rightarrow (3, 0) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (3, 3)$
 $(0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (2, 0) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (3, 3)$
 $(0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (2, 0) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (3, 3)$
 $(0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (3, 3)$
 $(0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (3, 3)$
 の5本

図を入れる。

道の本数とカタラン数

- 定理：道の総数 R_k はカタラン数と一致する。
- 従って R_k も 2 項係数で書くことができる。
- 検算の時に書いた公式

$$R_{k+1} = R_0 R_k + R_1 R_{k-1} + \cdots + R_{k-1} R_1 + R_k R_0$$

を証明できる。

- 証明方法：道を 2 つに切って、短い 2 つの道の組み合わせで書き表す

- 5 次方程式の解を、無限に続く小数の形で書き表した
- 未知の係数を組み合わせの数 ${}_nC_k$ で書き表した
- 2 次方程式の時と同じやり方が使えた
- 未知の係数を、道の本数で表すこともできた
- 方程式、数列、組み合わせの数、微分積分、などのいろいろな数学が関係している。

- 3次方程式や4次方程式に関する過去のビデオは「puki 落合」→「私の本棚」→「ビデオ」にある。
- 一般の5次方程式は「チルンハウス変換」によって $x^5 - x + c = 0$ の形にすることができる。
- 5次方程式の他の4つの解も類似のやり方で求められる
- 5つの解の関係を記述するのがガロア理論, モノドロミー