① 随伴行列 (P178)

$$A^* = {}^t\overline{A}$$

例 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix}$

② エルミート行列 (P181)

$A = A^*$ のとき。

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2+3i \\ 2-3i & 4 \end{pmatrix}$

③ ユニタリ行列 (P182)

$U^{-1} = U^*$ のとき ($U^*U = E$ とも同値)
($UU^* = E$ とも同値)

例 実直交行列

例 $U = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix}$

④ 正規行列 (P184)

$A^*A = AA^*$ のとき。

関係

実対称 ⇒ エルミート ⇒ 正規

実直交 ⇒ ユニタリ ⇒ 正規

補題

$P = (u_1, \cdots, u_n)$: 正方行列

(1). $u_1, \cdots, u_n$ が1次独立 $\Longleftrightarrow$ P : 正則行列

$\Longleftrightarrow$ $u_1, \cdots, u_n$ が $\mathbb{R}^n$ の基 (定理4.4.5, P85)

(2) $u_1, \cdots, u_n$ は実ベクトルで正規直交

$\Longleftrightarrow$ P : 直交行列

定理6.2.5 (P119)

(3) $u_1, \cdots, u_n$ は複素ベクトルで,

標準エルミート内積に関して正規直交

$\Longleftrightarrow$ P : ユニタリ行列

定理9.2.4 (P182)

《列ベクトルの性質と行列の名前の対応》

定理9.1.4(1)を理解するために、
P150-151の「直和」を説明しておく必要がある。

定義 V：線形空間，$\begin{array}{l} W_1 < V \\ W_2 < V \end{array}$ 部分空間に対して

$V = W_1 \oplus W_2$ （Vが，W_1とW_2の直和である）とは，

(a) $\cancel{V = W_1 + W_2}$ VはW_1とW_2で生成されている
かつ
(b) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

(例) $V = \mathbb{R}^3$，$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$，$W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

(例) $V = \mathbb{R}^3$，$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$，$W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\boxed{\text{定理9.1.4(1)の証明}}$では，1行めから9行めで生成することを示している。
（上の定義の(a)）

上の定義の性質(b)の証明は，10行めで省略されている。

$\boxed{W \cap W^{\perp} = \{0\} \text{ の証明}}$

$v \in W \cap W^{\perp}$ とする。

$(\underset{W^{\perp}}{\underset{\Uparrow}{v}}, \underset{W}{\underset{\Uparrow}{v}}) = 0$ である。（P176 直交補空間の定義の式.）

内積の性質(4)(P174)より $v = 0$. //

補題 $V = W_1 \oplus W_2$ とする．

$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ を W_1 の基底，$\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s\}$ を W_2 の基底 とする．

このとき，$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s\}$ は V の基底である。

pf 1次独立であること。

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_r\mathbf{v}_r + d_1\mathbf{u}_1 + \cdots + d_s\mathbf{u}_s = \mathbf{0}$$

を1次関係とする。

$$\underset{W_1}{\underset{\cap}{c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_r\mathbf{v}_r}} = \underset{W_2}{\underset{\cap}{-(d_1\mathbf{u}_1 + \cdots + d_s\mathbf{u}_s)}}$$

$W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ ゆえ

$$\begin{cases} c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0} \\ d_1\mathbf{u}_1 + \cdots + d_s\mathbf{u}_s = \mathbf{0} \end{cases}$$

$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$: 1次独立ゆえ $c_1 = \cdots = c_r = 0$

$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s$: 1次独立ゆえ $d_1 = \cdots = d_s = 0$ //

生成すること

$^\forall \mathbb{v} \in V$, $^\exists \mathbb{w}_1 \in W_1$, $^\exists \mathbb{w}_2 \in W_2$ s.t.

$$\mathbb{v} = \mathbb{w}_1 + \mathbb{w}_2.$$

$\mathbb{w}_1 \in W_1$ に対して $^\exists c_1, \cdots, c_r$ s.t.

$$\mathbb{w}_1 = c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c_r\mathbb{v}_r.$$

$\mathbb{w}_2 \in W_2$ に対して $^\exists d_1, \cdots, d_s$ s.t

$$\mathbb{w}_2 = d_1\mathbb{u}_1 + \cdots + d_s\mathbb{u}_s$$

従って $\mathbb{v} = c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c_r\mathbb{v}_r + d_1\mathbb{u}_1 + \cdots + d_s\mathbb{u}_s$. // 証明おわり.

系. $\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$.

pf 両辺とも $r+s$。//

この系を用いると定理 9.1.4 の (2) の証明ができる。
(P177)

なお定理 9.1.4(2) の左辺の n は $n = \dim V$ である。

定理4.1.4(3)の別証明

$\{u_1, \ldots, u_r\}$: Wの正規直交基底

$\{v_1, \ldots, v_s\}$: $W^\perp$の正規直交基底 とする。

補題より $\{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s\}$ は Vの基底である。

(正規直交基底でもある).

$w \in (W^\perp)^\perp$ とする。

$$w = c_1 u_1 + \cdots + c_r u_r + d_1 v_1 + \cdots + d_s v_s$$ と書く。

$$0 = (\underset{\substack{\cap \\ (W^\perp)^\perp}}{w}, \underset{\substack{\cap \\ W^\perp}}{v_1}) = (c_1 u_1 + \cdots + c_r u_r + d_1 v_1 + \cdots + d_s v_s, v_1)$$

$$= c_1 \underbrace{(u_1, v_1)}_{0} + \cdots + c_r \underbrace{(u_r, v_1)}_{0} + d_1 \underbrace{(v_1, v_1)}_{1} + d_2 \underbrace{(v_2, v_1)}_{0} + \cdots + d_s \underbrace{(v_s, v_1)}_{0}$$

$= d_1 \quad \therefore d_1 = 0$.

$0 = (w, v_i) = d_i$
$i = 1, \ldots, s.$ となるので、

$$w = c_1 u_1 + \cdots + c_r u_r \in W. \quad //$$

定理 9.1.6 の別証明

$$((T^*)^*(\mathbf{u}), \mathbf{v})$$

$$\underset{\text{P174 内積の性質(3)}}{=} (\mathbf{v}, (T^*)^*(\mathbf{u}))$$

$$\underset{\text{P178 随伴変換の定義}}{=} (T^*(\mathbf{v}), \mathbf{u})$$

$$\underset{\text{内積の性質(3)}}{=} (\mathbf{u}, T^*(\mathbf{v}))$$

$$\underset{\text{随伴変換の定義}}{=} (T(\mathbf{u}), \mathbf{v}).$$

$$\therefore 0 = ((T^*)^*(\mathbf{u}), \mathbf{v}) - (T(\mathbf{u}), \mathbf{v})$$

$$\underset{\text{内積の性質(1)(2)}}{=} ((T^*)^*(\mathbf{u}) - T(\mathbf{u}), \mathbf{v}).$$

従って（次ページの補題を使う）

$$(T^*)^*(\mathbf{u}) - T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

$$\therefore (T^*)^* = T. \quad //$$

補題 $\mathbb{u} \in V$ とする。

「$\forall \mathbb{v} \in V$ に対して $(\mathbb{u}, \mathbb{v}) = 0$」ならば $\mathbb{u} = \mathbb{0}$.

pf $\mathbb{v} = \mathbb{u}$ とすると $(\mathbb{u}, \mathbb{u}) = 0$.

内積の性質(4) より. $\mathbb{u} = 0$. //