

2021 年 1 月 19 日配布分

数学演習 IIA-12 回目の略解：内積、行列の冪

1 (1)

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{c}, \mathbf{u} \rangle &= \langle \mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle && \mathbf{c} \text{ の定義} \\ &= \langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle && \text{内積の第 1 成分に関する線形性} \\ &= \langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle \|\mathbf{u}\|^2 && \text{内積を用いたノルムの表示} \\ &= \langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle && \mathbf{u} \text{ のノルムに対する仮定} \\ &= 0.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\|\mathbf{c}\|^2 &= \langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle \\ &= \langle \mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u}, \mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u} \rangle \\ &= \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle - 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle^2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \\ &= \|\mathbf{b}\|^2 - \langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle^2.\end{aligned}$$

ここで 3 つ目の等号では、p215, line 9 の公式

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2$$

を用いている。(p215, line 3 から line 5 の計算が参考になる。)

(3) (2) の左辺が非負なので。

(4) $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ の時は、両辺とも 0 なので等号が成立する。以下 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ とする。 $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$ とする。この時、

$$\|\mathbf{u}\| = \left\| \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \right\| = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \|\mathbf{a}\| = 1$$

であるので (3) を使うことができる。この時、(3) の左辺は

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle^2 = \left\langle \mathbf{b}, \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \right\rangle^2 = \left(\frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle \right)^2 = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|^2} \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle^2$$

となるので、両辺に $\|\mathbf{a}\|^2$ をかければ (4) を得る。

- コメント：2次元の標準内積の場合には、 \mathbf{b} を斜辺、 \mathbf{c} と $\langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u}$ を直角を挟んだ2辺とするような直角三角形を描くと意味が読み取りやすい。ただし、証明では幾何学的な直感を使わずに内積の性質だけから論述する。

$$\boxed{2} \quad (1) \quad A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(2) \quad \text{固有値は } 1, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0. \text{ 固有空間は、 } W(1) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right),$$

$$W\left(\frac{2}{3}\right) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad W\left(-\frac{1}{3}\right) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad W(0) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

$$(3) \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ とすると、 } AP = P\Lambda.$$

(4)

$$\begin{aligned} A^n &= (P\Lambda P^{-1})^n = P\Lambda^n P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{3}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n & 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n & 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ 0 & \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ 0 & \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(5) \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \\ s_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \\ s_0 \end{pmatrix} \text{ であるので、}$$

$$\begin{aligned} q_n &= \left(\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)q_0 + \left(\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)r_0 + \left(\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)s_0 \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n(q_0 + r_0 + s_0) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n(q_0 - 2r_0 + s_0), \\ r_n &= \left(\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)q_0 + \left(\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)r_0 + \left(\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)s_0 \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n(q_0 + r_0 + s_0) - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n(q_0 - 2r_0 + s_0), \\ s_n &= 0 \end{aligned}$$

となる。特に

$$q_n + r_n + s_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n(q_0 + r_0 + s_0)$$

となる。したがって、

$$\frac{r_n}{q_n + r_n + s_n} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{q_0 - 2r_0 + s_0}{q_0 + r_0 + s_0}$$

と書ける。 $n \rightarrow \infty$ での極限は $\frac{1}{3}$ 。

- 1 から 6 の目が出るサイコロの場合は、固有値は、 $1, \frac{5}{6}, -\frac{1}{6}, 0$ であり、
 $\dim W(1) = 1, \dim W\left(\frac{5}{6}\right) = 1, \dim W\left(-\frac{1}{6}\right) = 2, \dim W(0) = 3$ である。

上がっていない時に、ゴールまで 1 マス、2 マス、3 マス、4 マス、5 マスの地点にいる条件付き確率の $n \rightarrow \infty$ における極限は、それぞれ $\frac{5}{15}, \frac{4}{15}, \frac{3}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{15}$ となる。

- さらに追求すると、 $W\left(\frac{5}{6}\right)$ の固有ベクトルの一つは、
$$\begin{pmatrix} -15 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
 である。このことが上の

条件付き確率の極限の比率と直接関係している、第 1 成分を除外して比率を考えれば良い。また、 $W(0)$ は $\mathbf{e}_6 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_5 - \mathbf{e}_3$ で生成され、 $W\left(-\frac{1}{6}\right)$ は $\mathbf{e}_7 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_6 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_5 - \mathbf{e}_4$ で生成されている。

$$\boxed{3} \quad (1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(2) 固有値は、 $1, -2, 4$.

$$\text{固有空間は } W(1) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad W(-2) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad W(4) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

$$(3) \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ とすると、 } AP = P\Lambda.$$

(4) $W(1)$ に属するベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対応する多項式は 1 .

$W(-2)$ に属するベクトル $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対応する多項式は $-1 + x$.

$W(4)$ に属するベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対応する多項式は $1 - 2x + x^2$.

- 結果の解釈：つまり、多項式 $(x-1)^i$ は固有値 $(-2)^i$ に対応する固有ベクトルである。
($i = 0, 1, 2$.) 実際、 $x-1$ の x に $3-2x$ を代入すると、 $(3-2x)-1 = 2-2x = -2(x-1)$ となるので、 $x-1$ を変数として式を整理すると変数が -2 倍されることになる。
- 基底を用いない言い換え：線型写像 $S : f(x) \mapsto f(x-1)$, $U : f(x) \mapsto f(-2x)$ と定義すると、 $T \circ S = S \circ U$ となっている。 T, S, U の行列表示がそれぞれ A, P, Λ である。