2021年10月13日

数学演習 IIA-2 回目：線型空間の基底

$\boxed{1}$ 次の線形空間 V の部分集合 S は基底であるかないか？

(1) V を２次の正方行列全体とする。

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

$S = \{X, Y, Z\}$ とする。

(2) $V = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f'' = -f\}$ とする。

$$f_1(x) = \sin x,\ f_2(x) = \cos x,\ f_3(x) = \sin(x + \tfrac{\pi}{6}) \text{ とする。}$$

$S = \{f_1, f_2, f_3\}$ とする。

$\boxed{3}$ V を線型空間とする。$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ が V の基底であるとする。P を３次正則行列とする。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{pmatrix} P$$

によって $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ を定める。この時、$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ が V の基底であることを示せ。

$\boxed{3}$ V を２次以下の多項式の全体とする。$g_1(x) = 1,\ g_2(x) = x,\ g_3(x) = x^2$ とする。

$f_1(x) = x(x-1),\ f_2(x) = (x-1)(x+1),\ f_3(x) = x(x+1)$ とする。

(1) $\{f_1, f_2, f_3\}$ は V の基底であることを示せ。

(2) 基底 $\{g_1, g_2, g_3\}$ から基底 $\{f_1, f_2, f_3\}$ を作る変換行列 P を求めよ。

(3) a, b, c を実数とする。多項式 $a + bx + cx^2$ を $a + bx + cx^2 = pf_1 + qf_2 + rf_3$ と書き表した時に、ベクトル $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ をベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ と行列 P または P^{-1} または ${}^tP$ または ${}^tP^{-1}$ を用いて表せ。

- 補足

$\boxed{1}$ 基底でない場合は、線型独立と生成のどちらの性質が成り立たないのかを論証してください。

$\boxed{1}$ V が線型空間であることや S が V の部分集合であることは証明しなくて良い。

$\boxed{3}$ $\{g_1, g_2, g_3\}$ が V の基底であることは、証明しなくて良い。

$\boxed{3}$ (1) を後回しにして (2)(3) から解いて良い。

$\boxed{3}$ (3) 行列 P^{-1} の具体的な成分を求める必要はありません。