

2021年10月27日出題分。11月10日公開。

## 数学演習 IIA-4 回目の略解：直和と次元

- 1 (1)  $W_1 + W_3 = \text{Span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5)$  なので、 $(W_1 + W_3) \cap W_2 = \text{Span}(\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5)$ .  
(2) (1) を用いると  $((W_1 + W_3) \cap W_2) \cap W_3 = \text{Span}(\mathbf{e}_4)$  がわかる。  
別解： $((W_1 + W_3) \cap W_2) \cap W_3 = ((W_1 + W_3) \cap W_3) \cap W_2 = W_3 \cap W_2 = \text{Span}(\mathbf{e}_4)$ .

- 2 答えは何通りもある。例えば次のようなものが答えになる。

(1)  $\{E_{11} - E_{22}, E_{12} + E_{21}\}$ .

(2)  $\{E_{11} - E_{22}, E_{12} + E_{21}, E_{11} + E_{22}\}$ .

(3)  $\{E_{11} - E_{22}, E_{12} + E_{21}, E_{12} - E_{21}\}$ .

(4)  $\dim W_1 = 3, \dim W_2 = 3, \dim(W_1 \cap W_2) = 2, \dim(W_1 + W_2) = 4$ .

(5)  $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$  なので、直和でない。

- 3  $\mathbf{v}_1 \in W_1 \cap W_2 = \text{Span}(\mathbf{u}_1)$  なので、 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 p_{11}$  である。

$\mathbf{v}_2 \in W_1 = \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$  なので、 $\mathbf{v}_2 = p_{12}\mathbf{u}_1 + p_{22}\mathbf{u}_2$  である。

$\mathbf{v}_3 \in W_2 = \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3)$  なので、 $\mathbf{v}_3 = p_{13}\mathbf{u}_1 + p_{33}\mathbf{u}_3$  である。

したがって、
$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ 0 & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} \end{pmatrix}.$$