

2021 年 11 月 17 日配布

数学演習 IIA-6 回目：線型写像

1 (1) は線型写像である。(2)(3)(4) は線型写像でない。

2 V を 3 次以下の多項式全体のなす線形空間、 V' を 2 次以下の多項式全体のなす線型空間とする。

$$(Df)(x) = x \frac{d^2 f}{dx^2}(x) - \frac{df}{dx}(x)$$

と定める。つまり $D(f) = xf'' - f'$ 。

(1) $f, g \in V$ に対して、 $D(f + g) = D(f) + D(g)$,

$f \in V, k \in \mathbb{R}$ に対して、 $D(kf) = kD(f)$ を示す。

(2) D の核は $\text{Span}(1, x^2)$ 。

D の像は $\text{Span}(1, x^2)$ 。

証明のポイントは、 $D(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 3ax^2 - c$ 。

3 $P \in V$ はスカラー行列でない。

(2) f の核は $\text{Span}(E, P)$ 。

f の像は $\{Y \in V \mid \text{tr}(Y) = \text{tr}(YP) = 0\}$ 。

まあ、もちろん、こんな気の利いた記述は難しいと思いますが。

3' これに触発された問題： V を n 次正方行列のなす線型空間とする。 $P \in V$ を一つ固定する。 E, P, P^2, P^3, \dots で生成される部分空間を W と定義する。また、 $f(X) = PX - XP$ によって線型写像 $f: V \rightarrow V$ を定義する。

(1) $W \subset \text{Ker } f$ を示せ。

(2) $\text{Im } f \subset \{Y \in V \mid \text{全ての } A \in W \text{ に対して } \text{tr}(AY) = 0 \text{ が成り立つ}\}$ を示せ。

(3) 上の「(1) で等号が成立すること」と「(2) で等号が成立すること」と「 W の次元が n であること」は同値であることを示せ。